

## 分布定数線路の縦続行列 その 1

分布定数回路を式で表す場合に、縦続行列が便利である。

実際に、縦続行列を用いた例は、その 2 で述べるとして、まず、分布定数回路を縦続行列で表す方法について述べる。

### 1. 分布定数線路の等価回路

分布定数回路を回路的に書き表すと図 1 のようになる。ここに  $L, C$  は単位長当たりのインダクタンスおよびキャパシタンスであり、 $\Delta v, \Delta i$  は長さ方向  $x$  の微小区間  $\Delta x$  における電圧  $v$ 、および電流  $i$  の変化分を表す。

図 1 において、

$$-\Delta v = L\Delta x \frac{di}{dt} \dots\dots\dots (1)$$

$$-\Delta i = C\Delta x \frac{dv}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

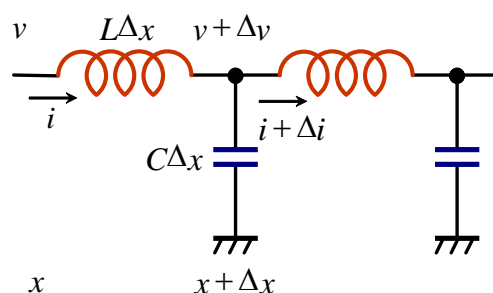


図 1. 分布定数線路の等価回路

であり、両式で、 $\Delta x \rightarrow 0$  とすると、

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \dots\dots\dots (3)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} \dots\dots\dots (4)$$

となる。式(3)、式(4)が分布定数線路の基本式であり、この偏微分方程式を解けば電流、電圧が求まる。

回路が線形の場合にはラプラス変換によって偏微分方程式を常微分方程式にして、簡単に解くことが可能である。

式(2.37)、(2.38)をそれぞれラプラス変換して、

$$-\frac{dV}{dx} = sLI \dots\dots\dots (5)$$

$$-\frac{dI}{dx} = sCV \dots\dots\dots (6)$$

を得る。式(5)を  $x$  で微分して式(6)を代入すると、

$$\frac{d^2V}{dx^2} - s^2LCV = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となる。式(7)は、ヘルムホルツ方程式(Helmholtz equation)または波動方程式(wave equation)と呼ばれるもので、分布定数線路を伝搬する信号は波動としての性質をもっていることを示している。同式は、

$$V = e^{\pm s\sqrt{LC}x} \dots\dots\dots (8)$$

の解を持つ。ここで、 $u=1/\sqrt{LC}$  とおく。  $u$  は線路上を伝わる信号の進む速度である。

式(7)の一般解は次のようになる。

$$V(x, s) = A_1(s)e^{-\frac{x}{u}s} + A_2(s)e^{\frac{x}{u}s} \dots\dots\dots (9)$$

電流は、式(5)と式(9)とから次のようになる。

$$I(x, s) = -\frac{1}{sL} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{Z_0} \left\{ A_1(s)e^{-\frac{x}{u}s} - A_2(s)e^{\frac{x}{u}s} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  であり、これを線路の特性インピーダンスという。

$e^{\pm \frac{x}{u}s}$  のラプラス逆変換は、時間関数  $f(t)$  に対して  $f(t \pm x/u)$  の演算を施すことである。  $x$  は線路上の距離、 $u$  は線路上を伝搬する信号の進む速度であるから、 $x/u$  は信号が距離  $x$  を進む時間を表す。

したがって、複号がマイナスのときは、距離  $x$  の増加に伴って時刻  $t$  よりも前の現象を表す、すなわち  $x/u$  の時間後によく時刻の原点  $t=0$  の現象が現れるのであるから、信号の進む向きに進む波、右行波を意味する。同様に複号がプラスのときには、信号の進む向きと逆の左行波を表すことが分かる。

分布定数線路を伝わる波は、この右行波と左行波にそれぞれ  $A_1, A_2$  という係数を掛けて加えたものであることが分かる。

## 2. 境界条件と一般解

線路条件を図 2 のように設定する。すなわち、送端側の出力抵抗が  $R_1$ 、受端側は  $R_2$  で終端され、線路長は  $l$  という分布定数線路を考える。

ここで、図 2 により境界条件を求めて式(9)および式(10)に代入する。

$x=0$  で  $V = V_0 - R_1 I$  および  $x=l$  で  $V = R_2 I$  であるから、

$$\left(1 + \frac{R_1}{Z_0}\right) A_1 + \left(1 - \frac{R_1}{Z_0}\right) A_2 = V_0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\left(1 - \frac{R_2}{Z_0}\right) A_1 e^{-\tau s} + \left(1 + \frac{R_2}{Z_0}\right) A_2 e^{\tau s} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $\tau = l/u$  であり、線路の近端から遠端までを信号が伝わる時間を表す。

式(11)と式(12)の連立方程式を  $A_1$  と  $A_2$  について解く。

$$A_1(s) = \frac{Z_0}{R_1 + Z_0} \times \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-2\tau s}} V_0 \dots\dots\dots (13)$$

$$A_2(s) = \frac{r_2 Z_0}{R_1 + Z_0} \frac{e^{-2\tau s}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\tau s}} V_0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$r_1 = \frac{R_1 - Z_0}{R_1 + Z_0} \dots\dots\dots (15)$$

$$r_2 = \frac{R_2 - Z_0}{R_2 + Z_0} \dots\dots\dots (16)$$

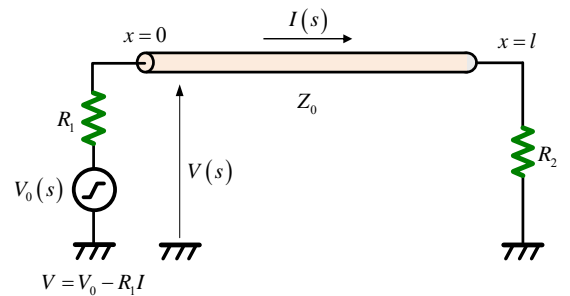


図 2. 境界条件

である。これらは、それぞれ近端と遠端における反射係数である。

電圧および電流の一般解は、式(13)および式(14)を式(9)および式(10)に代入することで求まる。

$$V_1(s) = V(0, s) = A_1 + A_2 = \frac{Z_0}{R_1 + Z_0} \times \frac{1 + r_2 e^{-2\tau s}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\tau s}} V_0 \dots\dots\dots (17)$$

$$I_1(s) = I(0, s) = \frac{1}{Z_0} (A_1 + A_2) = \frac{1}{R_1 + Z_0} \times \frac{1 - r_2 e^{-2\tau s}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\tau s}} V_0 \dots\dots\dots (18)$$

$$V_2(s) = V(l, s) = A_1 e^{-\tau s} + A_2 e^{\tau s} = \frac{Z_0}{R_1 + Z_0} \times \frac{(1 + r_2) e^{-\tau s}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\tau s}} V_0 \dots\dots\dots (19)$$

$$I_2(s) = I(l, s) = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-\tau s} - A_2 e^{\tau s}) = \frac{1}{R_1 + Z_0} \times \frac{(1 - r_2) e^{-\tau s}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\tau s}} V_0 \dots\dots\dots (20)$$

式(17)～式(18)をラプラス逆変換すると時間応答が求まる。ただし、両式は、分母に  $s$  の指数関数が含まれているのでこのままではラプラス逆変換できない。この場合は、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \dots\dots\dots (21)$$

であることを用いて、級数展開するとラプラス逆変換できる<sup>1)</sup>。

### 3. 線路の縦続行列

縦続行列とは、文字どおり、線路の縦続接続したときのふるまいを求める場合に有用である。

一般に、縦続接続には図 3 に示す縦続行列(または F 行列という)を用いる。

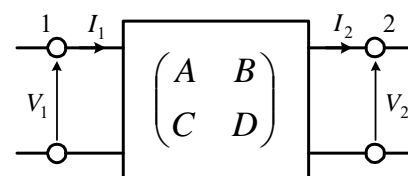


図 3. 縦続行列

縦続行列とは、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

で表される係数行列のことをいう<sup>1)</sup>。電圧・電流には、それぞれ近端に 1、遠端に 2 のサフィックスをつけて表す。

係数行列は、式(17)～式(20)を用いて求める。なお、縦続行列を用いて、単独線路の過渡現象を求めるにはラプラス変換が便利であるが、本稿では、縦続接続した場合の解析を目的とするので、 $s \rightarrow j\omega$  において、周波数特性を求める。なお、オイラー(Euler)の公式を用いて、三角関数で表すことができる。

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2} = \cos \omega\tau \dots\dots\dots (23)$$

$$B = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2} \times Z_0 = jZ_0 \sin \omega\tau \dots\dots\dots (24)$$

<sup>1)</sup> 四端子網として考えるときには電流の向きは四端子網に流れ込む電流を正にとるから、一般的には縦続行列の右辺の電流に負号をつけるが、本書では、左から右に流れる電流を常に正としているから、右辺の電流に負号はつかない。

$$C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2} \times \frac{1}{Z_0} = j \frac{\sin \omega\tau}{Z_0} \dots\dots\dots (25)$$

$$D = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2} = \cos \omega\tau \dots\dots\dots (26)$$

となる.

逆に, 縦続行列が与えられた場合に, 図 2 の回路において, 電圧と電流との関係は,

$$V_0 - R_1 I_1 = V_1 \dots\dots\dots (27)$$

$$V_2 = R_2 I_2 \dots\dots\dots (28)$$

であり, 両式から  $I_1, I_2$  を求めると,

$$I_1 = \frac{V_0 - V_1}{R_1} \dots\dots\dots (29)$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} \dots\dots\dots (30)$$

である. 式(30)を F 行列の定義の式(22)に代入すると,

$$V_1 = AV_2 + \frac{B}{R_2} V_2 \dots\dots\dots (31)$$

となる. 同様に, 式(29)を式(22)に代入すると,

$$\frac{V_0 - V_1}{R_1} = CV_2 + \frac{D}{R_2} V_2 \dots\dots\dots (32)$$

となる. 式(31)および式(32)を  $V_1, V_2$  について解くと,

$$V_1 = \frac{A + \frac{B}{R_2}}{A + \frac{B}{R_2} + R_1 C + \frac{R_1}{R_2} D} \times V_0 \dots\dots\dots (33)$$

$$V_2 = \frac{1}{A + \frac{B}{R_2} + R_1 C + \frac{R_1}{R_2} D} \times V_0 \dots\dots\dots (34)$$

を得る.

式(33)および式(34)を用いて, 複数の線路や集中定数回路を縦続に接続して得た縦続行列によって, 近端および遠端の電圧  $V_1, V_2$  を求めることができる.

### 参考文献

- 1) 碓井有三 : ボード設計者のための分布定数回路のすべて(改訂 3 版) 自費出版 (<http://radioy.a.la9.jp/>), pp.235-237, 2016