

分布定数線路の縦続行列 その 2

その 1 で、分布定数回路の縦続行列について述べた。

本稿（その 2）では、実際に縦続行列を用いて時間応答を求める。

図や式の番号は、その 1 からの通し番号とする。

1. 単一線路の場合

まず基本として、その 1 の式(34)の遠端の電圧を再掲する。

$$V_2 = \frac{1}{A + \frac{B}{R_2} + R_1 C + \frac{R_1}{R_2} D} \times V_0 \quad (34)$$

単一線路の場合は、ラプラス変換で解くのはそれほど煩雑ではないので、式(23)～式(26)の指数表現において、 $j\omega \rightarrow s$ と置いて、式(34)を書き換える。

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\frac{e^{s\tau} + e^{-s\tau}}{2} + \frac{Z_0}{R_2} \times \frac{e^{s\tau} - e^{-s\tau}}{2} + \frac{R_1}{Z_0} \times \frac{e^{s\tau} - e^{-s\tau}}{2} + \frac{R_1}{R_2} \times \frac{e^{s\tau} + e^{-s\tau}}{2}} \times V_0 \\ &= \frac{2}{\left(1 + \frac{Z_0}{R_2} + \frac{R_1}{Z_0} + \frac{R_1}{R_2}\right) e^{s\tau} + \left(1 - \frac{Z_0}{R_2} - \frac{R_1}{Z_0} + \frac{R_1}{R_2}\right) e^{-s\tau}} \times V_0 \\ &= \frac{R_2 Z_0}{(R_1 + Z_0)(R_2 + Z_0)} \times \frac{2e^{-s\tau}}{1 - \frac{(R_1 - Z_0)(R_2 - Z_0)}{(R_1 + Z_0)(R_2 + Z_0)} e^{-2s\tau}} \times V_0 \\ &= \frac{Z_0}{R_1 + Z_0} \times \frac{(1 + r_2)e^{-s\tau}}{1 - r_1 r_2 e^{-2s\tau}} \times V_0 \quad (35) \end{aligned}$$

となって、その 1 の式(19)に等しくなった。

ここで、その 1 の式(21)を用いて右辺を展開すると、

$$V_2 = \frac{Z_0}{R_1 + Z_0} \times (1 + r_2) e^{-s\tau} \left\{ 1 + r_1 r_2 e^{-2s\tau} + (r_1 r_2)^2 e^{-4s\tau} + (r_1 r_2)^3 e^{-6s\tau} + \cdots \right\} \times V_0 \quad (36)$$

を得る。

右辺の指数部のラプラス逆変換は、

$$e^{-\tau} F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t - \tau) \quad (37)$$

となって、時間遅れを表す。

式(36)は、線路の片道の遅延時間 τ の時間遅れの後、 $r_1 r_2$ を掛けて、 $3\tau, 5\tau, \dots$ 遅れの信号が続く。

2. 線路の縦続接続

複数の線路縦続接続の場合は、級数展開によるラプラス変換は煩雑になるので、周波数で数値計算し、フーリエ逆変換を行う。

図 4 に示す 2 本の線路の縦続接続は、それぞれの F 行列の積で求められる。すなわち、

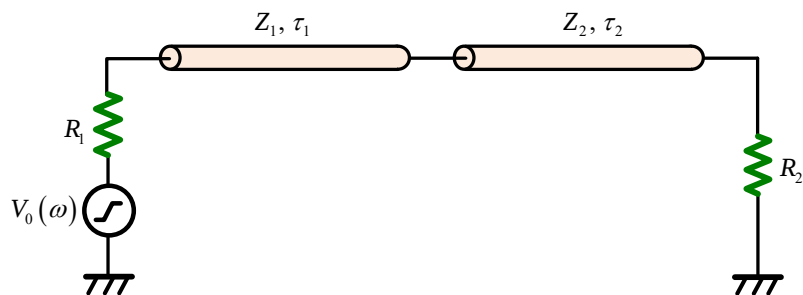


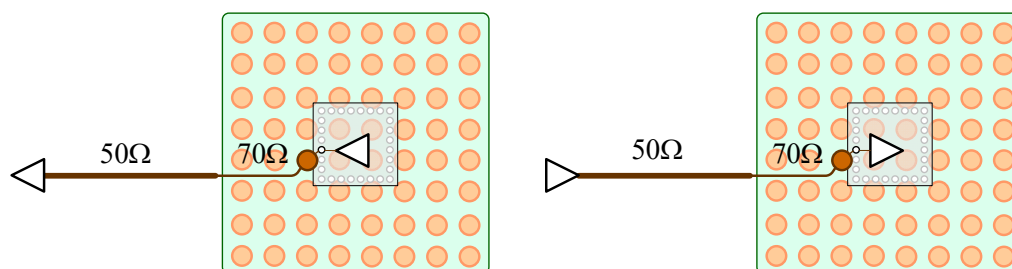
図 4. 2 本線路の縦続接続

$$F(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega \tau_1 & jZ_1 \sin \omega \tau_1 \\ j \frac{\sin \omega \tau_1}{Z_1} & \cos \omega \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega \tau_2 & jZ_2 \sin \omega \tau_2 \\ j \frac{\sin \omega \tau_2}{Z_2} & \cos \omega \tau_2 \end{pmatrix} \dots (38)$$

で与えられる。

式(38)の行列の積は、表計算ソフト(Excel)で容易に計算できる。

実際の例として、図 5 に示すように、IC パッケージの下部の配線はパッケージの端子の間を縫うように配線する必要があり、配線密度が高くなるので、配線幅を狭くすることが多い。



$$\tau_1 = \tau_2 = 0.25\text{ns}, t_r = 0.1\text{ns}$$

(a) IC から外部

(b) 外部から IC

図 5. 途中で配線幅が変化する場合

式(38)において、IC 下部の特性インピーダンスを 70Ω 、それ以外を 50Ω とした場合、信号の向きで反射の

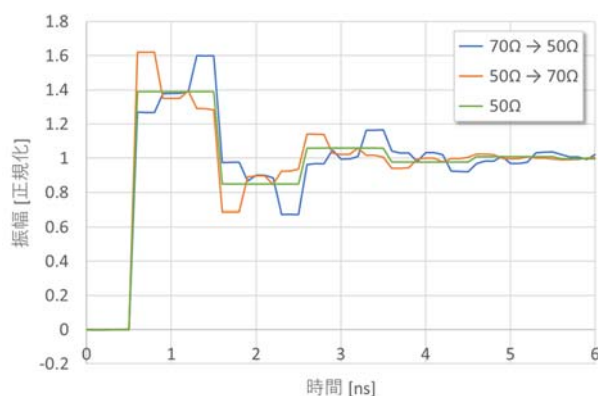


図 6. 解析結果 ($R_1=22\Omega$)

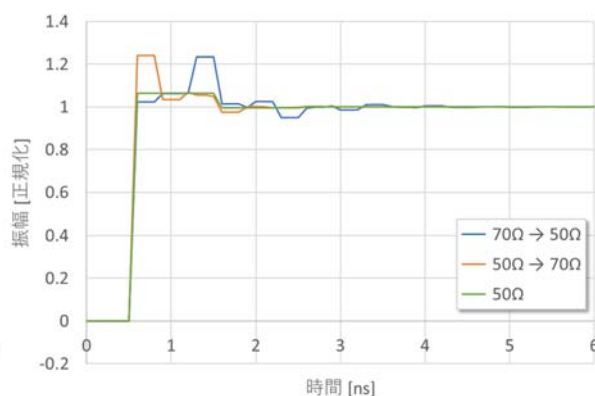


図 7. 解析結果 ($R_1=44\Omega$)

様子が異なるが、解析した結果($R_1 = 22\Omega$)を図 6 に示す。70 $\Omega \rightarrow$ 50 Ω は、図 5(a)を、50 $\Omega \rightarrow$ 70 Ω は、図 5(b)を示す。なお、同時に、IC 下部も 50 Ω に統一した場合も併せて示した。図 7 には、 $R_1 = 44\Omega$ とした場合の解析結果を示す。駆動能力を下げた影響で、反射が抑制されている。

3. 素子の縦続行列への追加

線路の縦続接続に際しては、線路だけでなく、抵抗やキャパシタなどの集中定数回路が接続されることが多い。例えば、IBIS モデルと線路との縦続接続や、バスの途中に接続されるレシーバによる容量負荷の接続などに適用できる。

(1) 入出力間に素子 図 8(a)

入出力間にインピーダンス Z_1 が接続されているとき、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

となる。

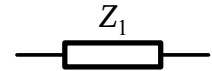


図 8 (a) 入出力間に素子

(2) 信号-Gnd 間に素子 図 8(b)

信号とグラウンド間にインピーダンス Z_2 が接続された場合

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

となる。

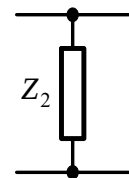


図 8 (b) 信号-Gnd 間に素子

複数の回路素子による構成の場合でも、図 5 の(a)と(b)の組み合わせで最終的に縦続行列を求めることによって、式(33)および式(34)の近端と遠端の電圧の周波数応答を求めることができる。

図 8 の各インピーダンスで表される素子は、集中定数だけでなく、分布定数回路でも式は成立する。

4. 近端からみた線路のインピーダンス

縦続行列を用いると、遠端に抵抗 R_2 を接続したときの、近端から見たインピーダンスを求めることができる。

式(22)および式(30)から、遠端の抵抗を R_2 とすると、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega \tau & jZ_0 \sin \omega \tau \\ j \frac{\sin \omega \tau}{Z_0} & \cos \omega \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 I_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

である。したがって、近端からみたインピーダンス Z_{in} は、

$$Z_{in}(0, \omega) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R_2 \cos \omega \tau + jZ_0 \sin \omega \tau}{Z_0 \cos \omega \tau + jR_2 \sin \omega \tau} \times Z_0 \dots\dots\dots (42)$$

となる。

5. スタブの解析

スタブとは、メインの配線に対して、一般的に短い配線がつながった場合をいう。図 9 の Z_s, τ_s のような配線がその一例である。

スタブの配線は、長くても解析は可能である。

メインのパスは、 Z_1, τ_1 と Z_2, τ_2 のルートで、その接続点に、 Z_s, τ_s がつながっている例である。

スタブは、図 8(b)を用いる。すなわち、スタブを含む 3 本の線路の縦続行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega \tau_1 & jZ_1 \sin \omega \tau_1 \\ j \frac{\sin \omega \tau_1}{Z_1} & \cos \omega \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \frac{\tan \omega \tau_s}{Z_s} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega \tau_2 & jZ_2 \sin \omega \tau_2 \\ j \frac{\sin \omega \tau_2}{Z_2} & \cos \omega \tau_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

で表される。

図 10 は、図 9 の回路の遠端の波形の解析例である。

配線長は、 $\tau_1=0.7\text{ns}$ 、 $\tau_2=0.35\text{ns}$ 、 $\tau_s=0.14\text{ns}$ 、特性インピーダンスはすべて 50Ω とした。

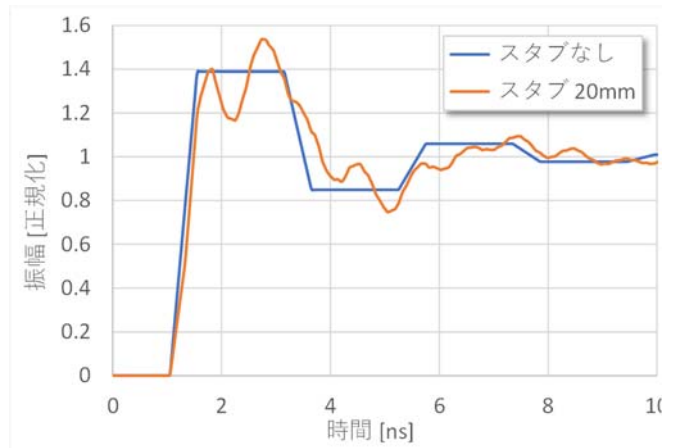


図 10. スタブの有無の波形

6. スタブが長い例

スタブは、通常、メインの線路に接続された短い線路を指すが、長い線路をスタブとみなして解析することも可能である。

図 8 に示す 1 対 2 伝送の場合、例

えば τ_2 の線路をスタブとみなす。

τ_2 の線路は、図 8(b)のように、 τ_1 の線路の根元にシャントで接続される。

したがって、トータルの縦続行列は、

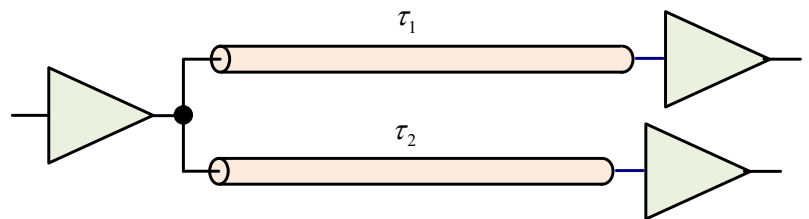


図 11. 1 対 2 伝送

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j \frac{\tan \omega \tau_2}{Z_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega \tau_1 & jZ_0 \sin \omega \tau_1 \\ j \frac{\sin \omega \tau_1}{Z_0} & \cos \omega \tau_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega \tau_1 & jZ_0 \sin \omega \tau_1 \\ j \frac{1}{Z_0} (\cos \omega \tau_1 \tan \omega \tau_2 + \sin \omega \tau_1) & -\sin \omega \tau_1 \tan \omega \tau_2 + \cos \omega \tau_1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

となる。

ここで、等長配線、すなわち、 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ とすると、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & jZ_0 \sin \omega\tau \\ j\frac{2}{Z_0} \sin \omega\tau & \frac{-1+2\cos^2 \omega\tau}{\cos \omega\tau} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

となる.

遠端開放のときの遠端の電圧は, 式(34)において, $R_2 = \infty$ とすると,

$$V_2 = \frac{1}{A+R_1C} \times V_0 \dots\dots\dots (46)$$

であるから, 式(45)の縦続行列の要素の A と C とをながめると, 特性インピーダンスが半分になっていることが分かる.

図 12 に, 図 11 の非等長伝送のときの遠端の電圧を示す.

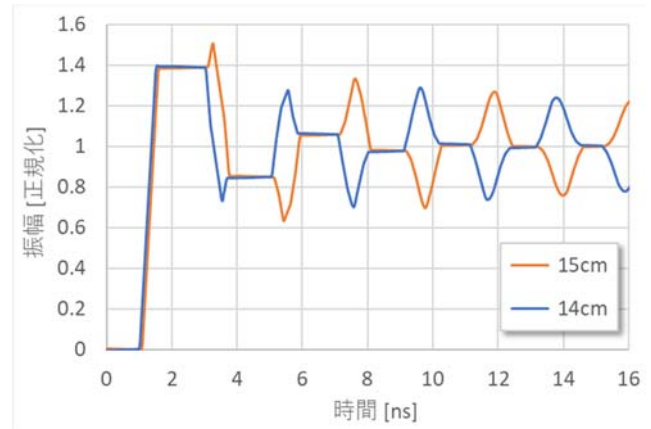


図 12. 非等長 1 対 2 伝送の遠端の波形

参考文献

- 1) 碓井有三 : ボード設計者のための分布定数回路のすべて(改訂 3 版) 自費出版 (<http://radioy.a.la9.jp/>), pp.156-162, 2016