碓井 有三

分布定数線路の縦続行列 その 3

その 1 で，分布定数回路の縦続行列について述べた．
その 2 では，実際に縦続行列を用いて時間応答を求めた．
本稿（その 3）では，ビアやコネクタの等価回路を中心に述べる．
図や式の番号は，その 1 からの通し番号とする．

1. ビアの等価回路

縦続行列の応用として，ビアの等価回路を考える．

簡単な例として，図 13 に示す π 型等価回路 (CLC) や，図 14 の T 型等価回路 (LCL) が多用される．周波数特性を調べるために，両端を終端して信号源を加えた回路を考える．

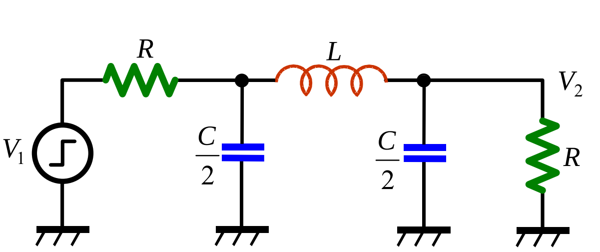


図 13. π 型等価回路

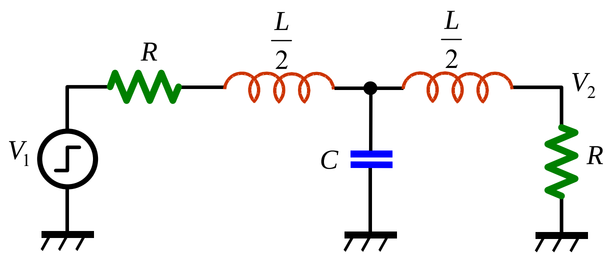


図 14. T 型等価回路

例として，以下の 3 通りの方法で，図 13 の等価回路を解く．

(1) インピーダンスの分圧で解く

図 13 の回路の右端のキャパシタ $C/2$ と抵抗 R の並列回路のインピーダンスは，

$$Z_1 = \frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}} \qquad (46)$$

これとインダクタンス L との直列接続

$$Z_2 = sL + \frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}} \qquad (47)$$

さらに，キャパシタ $C/2$ との並列接続

$$Z_3 = \frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{sL+\frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}}}} \qquad (48)$$

R と Z_3 との分圧

$$\frac{Z_3}{R_3+Z_3}=\frac{\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{sL+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}}}{R+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{sL+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}}} \quad\cdots\cdots(49)$$

L と Z_1 との分圧

$$\frac{Z_1}{sL+Z_1}=\frac{\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}{sL+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}} \quad\cdots\cdots(50)$$

結局，式(49)と式(50)の分圧の積により V_2 が求まる.

$$V_2=\frac{\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{sL+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}}}{R+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{sL+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}}}\times\frac{\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}{sL+\dfrac{1}{s\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{R}}}V_1 \quad\cdots\cdots(51)$$

を得る.

式(51)を整理して，

$$V_2=\frac{1}{LC^2R}\times\frac{4}{s^3+\dfrac{4}{CR}s^2+\dfrac{4}{(CR)^2}s+\dfrac{4}{LC}s+\dfrac{8}{LC^2R}}V_1 \quad\cdots\cdots(52)$$

(2)　網電流を未知数として解く

図 13 に対して，図 15 のように網電流を定義する．それぞれの網電流に対して，連立方程式を立てる．

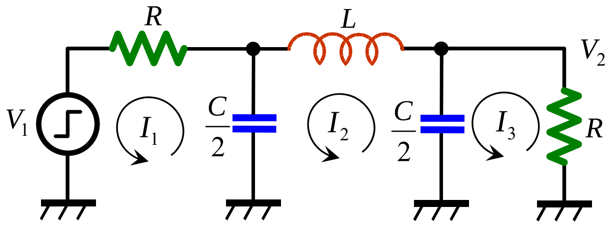


図 15．網電流

$$\begin{pmatrix} R+\dfrac{2}{sC} & -\dfrac{2}{sC} & 0 \\ -\dfrac{2}{sC} & \dfrac{4}{sC}+sL & -\dfrac{2}{sC} \\ 0 & -\dfrac{2}{sC} & \dfrac{2}{sC}+R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\cdots\cdots (53)$$

係数の行列式は，

$$\Delta=\begin{vmatrix} R+\dfrac{2}{sC} & -\dfrac{2}{sC} & 0 \\ -\dfrac{2}{sC} & \dfrac{4}{sC}+sL & -\dfrac{2}{sC} \\ 0 & -\dfrac{2}{sC} & \dfrac{2}{sC}+R \end{vmatrix}=\left(R+\frac{2}{sC}\right)^2\left(\frac{4}{sC}+sL\right)-8\left(\frac{1}{sC}\right)^2\left(R+\frac{2}{sC}\right)$$

$$=sLR^2+\frac{4RL}{C}+\frac{4R^2}{sC}+\frac{4L}{sC^2}+\frac{8R}{s^2C^2} \quad\cdots\cdots (54)$$

式(53)から I_3 を求めて V_2 を計算する．

$$V_2=RI_3=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R+\dfrac{2}{sC} & -\dfrac{2}{sC} & V_0 \\ -\dfrac{2}{sC} & \dfrac{4}{sC}+sL & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{sC} & 0 \end{vmatrix}=\frac{\left(\dfrac{2}{sC}\right)^2}{sLR^2+\dfrac{4RL}{C}+\dfrac{4R^2}{sC}+\dfrac{4L}{sC^2}+\dfrac{8R}{s^2C^2}}V_0$$

$$=\frac{1}{LC^2R}\times\frac{4}{s^3+\dfrac{4}{CR}s^2+\dfrac{4}{(CR)^2}s+\dfrac{4}{LC}s+\dfrac{8}{LC^2R}}V_1 \quad\cdots\cdots (55)$$

(3)　テブナンの定理を用いる

図 13 の回路の右端のキャパシタ $C/2$ と抵抗 R の並列回路の前の，$R, C/2, L$ の回路の開放電圧 V_{EQ} は，

$$V_{EQ}=\frac{\frac{1}{s\frac{C}{2}}}{R+\frac{1}{s\frac{C}{2}}}V_1 \quad\cdots\cdots (56)$$

である．

次に，$C/2$ と R の並列回路から左を見たインピーダンス Z_{EQ} は，

$$Z_{EQ}=sL+\frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}} \quad\cdots\cdots (57)$$

$C/2$ と R の並列回路のインピーダンス Z_L は，

$$Z_L=\frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}} \quad\cdots\cdots (58)$$

遠端の電圧は，

$$V_2=\frac{Z_L}{Z_{EQ}+Z_L}\times V_{EQ}=\frac{\frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}}}{sL+\frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}}+\frac{1}{s\frac{C}{2}+\frac{1}{R}}}\times\frac{\frac{1}{s\frac{C}{2}}}{R+\frac{1}{s\frac{C}{2}}}V_1 \quad\cdots\cdots (59)$$

右辺を整理して，

$$V_2=\frac{1}{LC^2R}\times\frac{4}{s^3+\frac{4}{CR}s^2+\frac{4}{(CR)^2}s+\frac{4}{LC}s+\frac{8}{LC^2R}}V_1 \quad\cdots\cdots (60)$$

(4)　縦続行列を用いる

最初の $C/2$ と L の縦続接続，式(39)と式(40)を用いて，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ s\frac{C}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & sL\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & sL\\ s\frac{C}{2} & \frac{s^2LC}{2}+1\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots (61)$$

さらに後段の $C/2$ との縦続接続

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & sL\\ s\frac{C}{2} & \frac{s^2LC}{2}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ s\frac{C}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s^2\frac{LC}{2} & sL\\ sC+\frac{s^3LC^2}{4} & \frac{s^2LC}{2}+1\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots (62)$$

遠端の電圧は，

$$V_2 = \frac{1}{A + \frac{B}{R} + RC + D} V_1 = \frac{1}{1 + s^2 \frac{LC}{2} + s\frac{L}{R} + sCR + \frac{s^3 LC^2 R}{4} + \frac{s^2 LC}{2} + 1} V_1$$

$$= \frac{1}{LC^2 R} \times \frac{4}{s^3 + \frac{4}{CR}s^2 + \frac{4}{(CR)^2}s + \frac{4}{LC}s + \frac{8}{LC^2 R}} V_1 \quad \cdots\cdots (63)$$

となって, (1), (2), (3)と同じ解を得た.

いずれの解き方でも当然ながら同じ結果となるが，いずれも式の変形を辛抱強く行う必要がある.

縦続行列を用いる方法は，エクセルによる数値計算が容易なので，筆者は多用している.

すなわち，$s = j\omega$とおいて，それぞれの角周波数ごとに縦続行列とその積を計算し，信号源を掛けると式(63)が求まる．行列の積は，一度計算したら，それをコピーするだけでよい.

2. ビアの定数

図 16 は，分布定数回路の等価回路である.

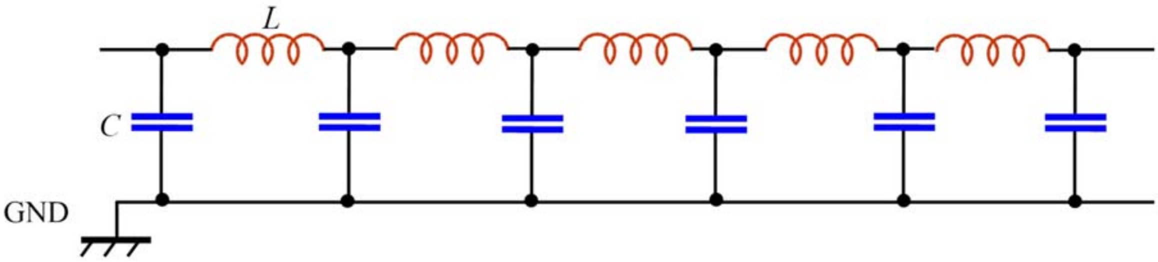


図 16．分布定数回路の等価回路

同図のLおよびCは，単位長あたりの値であり，Lは，$250-500\,\mathrm{nH/m}$，Cは，$100-180\,\mathrm{pF/m}$程度である.

分布定数回路の特性インピーダンスZ_0は,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \cdots\cdots (64)$$

であり，単位長あたりの遅延時間t_dは,

$$t_d = \sqrt{LC} \quad \cdots\cdots (65)$$

である.

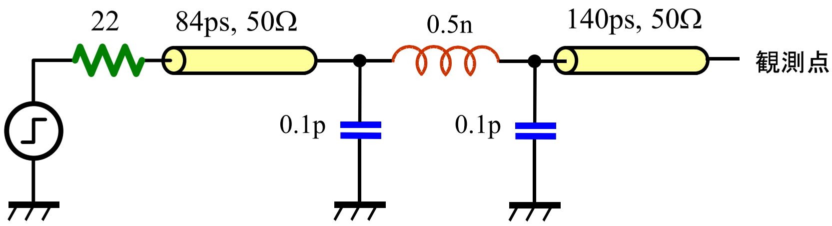
図 13 および図 14 の等価回路は，分布定数回路の 1 区間と同じであり，これらの等価回路においても同様で，特性インピーダンスは式(64)，遅延は，式(65)で表される.

特性インピーダンスは，ビアを含む線路のインピーダンスに合わせることが望ましい．遅延は，その不連続部の波形乱れを抑えるために，できるだけ小さく設定する.

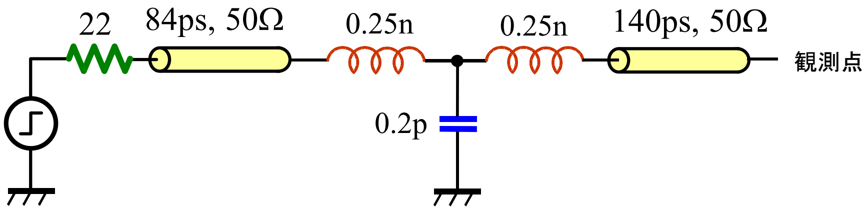
コネクタの形状が，高周波になるほど小型化しているのはそのためでもある.

ただ，ボードの場合は，板厚が厚くなると，ビアを通過する遅延時間t_dは大きくなる．埋め込みビアやブラインドビアは，この遅延時間を小さくする意味もある.

コネクタやビアの影響を誇張して見るために，図 17 の回路で信号の立ち上がりを極めて速い 10ps としたとき



(a) π 型等価回路



(b)T 型等価回路

図 17. ビアの反射解析回路

のπ型とT型の遠端波形を解析して，図 18 に示す．ドライバの出力抵抗は 22 Ω，ほぼ 12 mAドライバに相当する. 0.5ns 付近の反射部分を拡大して破線で囲んで示した.

同図の，ビアの前後に接続される線路の長さには特別な意味はない．ビアによる反射を観測しやすいように決めたものである.

図 17 の(a)，(b)どちらの等価回路でも，立ち上がりにオーバシュートが現れるのは共通の特徴であるが，ドライバ側の線路と LC 回路との間の反射と，LC 回路の通過，および遠端の線路との反射などが重なって，等価回路の(a)と(b)とでは，凸凹の現れ方が逆になっている. この凸凹が逆になっているのは等価回路から考えると当然であるが，実際にはあまり重要ではない．また，この解析は影響を誇張したもので，図 19 には信号の立ち上がりを，100ps(これでもかなり速い)としたときの解析結果を示す．立ち上がり時間だけ反射のピークがずれているので，拡大したのは 0.5ns～0.6ns 付近の波形である．通常の用途では，ほとんど影響は無視されると考える.

図 17 のビアの等価回路を通過する際の遅延時間は，$\sqrt{LC}$ であり，このときの定数で遅

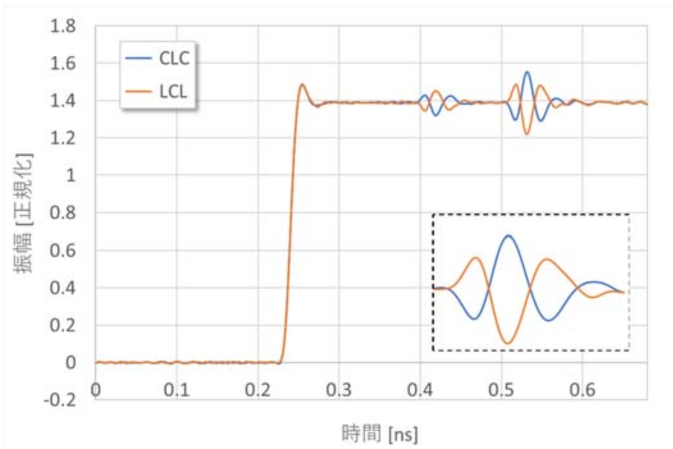


図 18. 解析結果 $t_r = 10\text{ps}$

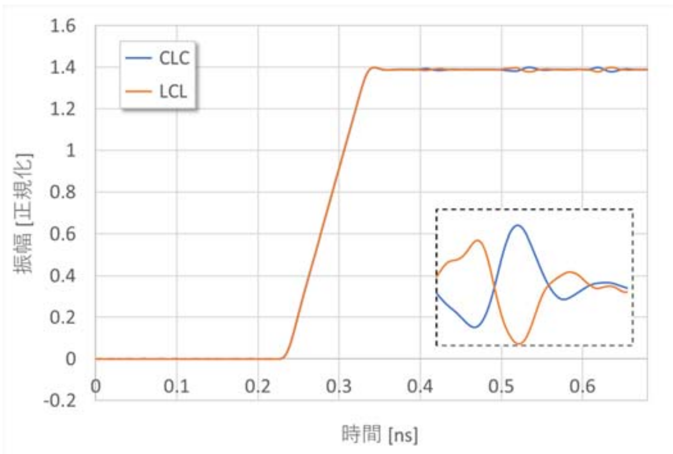
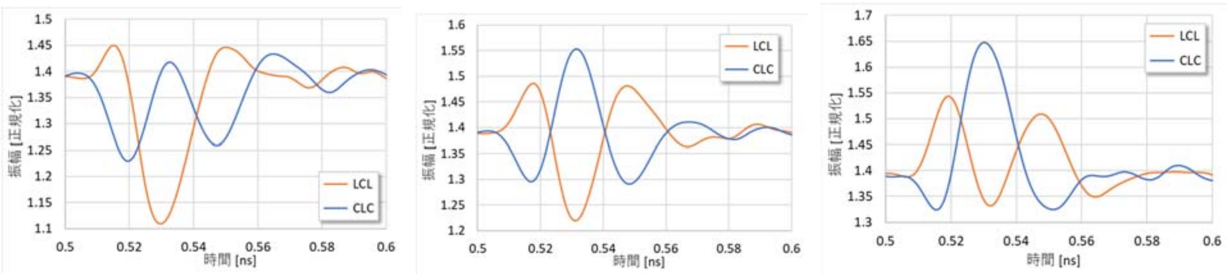


図 19. 解析結果 $t_r = 100\text{ps}$

延は 10 ps である．同様に，$\sqrt{L/C}$ は，この LC 回路のインピーダンスとなる．図 17 の定数では，インピーダンスは 50　Ω である．コネクタの設計では，なるべく遅延を小さく，インピーダンスは線路の特性インピーダンスに極力合わせるように設計される．

図 20 に，異なったインピーダンスに設定されたビアの反射波形の拡大部分を示す．



(a)40Ω　(b)50Ω　(c)60Ω

図 20．異なるインピーダンスのビアの反射波形

同図は，前述のとおり，影響を誇張して示すために，信号の立ち上がり時間を 10ps としたが，遅い立ち上がり時間の場合，インピーダンスが低いと，反射は，凹となり，高いと凸となって現れる．