碓井 有三

S パラメータと F 行列

S パラメータ(Scattering Parameter)とは，散乱行列とも呼ばれ，高周波における，回路の基本的な特性を表すためのものである.

シグナルインテグリティの分野でも，素子や線路の特性を表すのに用いられている.

多くの場合，ネットワークアナライザを用いて解析するが，机上で，数式を用いて解析する方法について考える.

一方, F 行列(F マトリクス)は，縦続行列ともいい, 1 本はもちろん，複数の線路や回路素子を縦続に接続して解析するのに適している.

なお，本稿では, S パラメータと F 行列という用語を用いているが，パラメータと行列どちらかに統一してもいいし，逆に S 行列, F パラメータしてもよい．ただ，慣用的に S パラメータと F 行列という使い方が一般的のようであるのでこのように表記した．特に深い意味はない.

1.　F 行列から S パラメータへの変換

図 1 は, 2 ポートの S パラメータを示す．ここに，a は入射波，b は反射波であり，両者は,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

の関係がある.

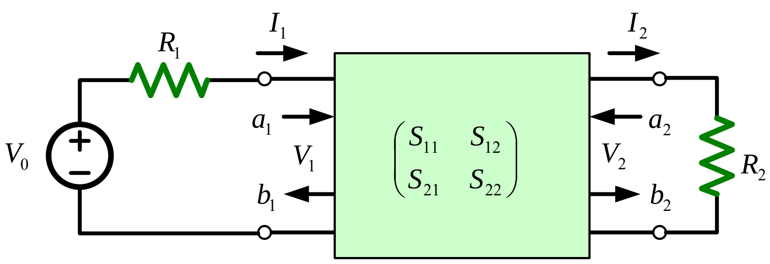

図 1. S パラメータ

それぞれのポートの電圧と電流は，以下の関係がある.

$$V_1 = (a_1 + b_1)\sqrt{R_1} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$V_2 = (a_2 + b_2)\sqrt{R_2} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$I_1 = \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_1}} \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$I_2 = -\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_2}} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

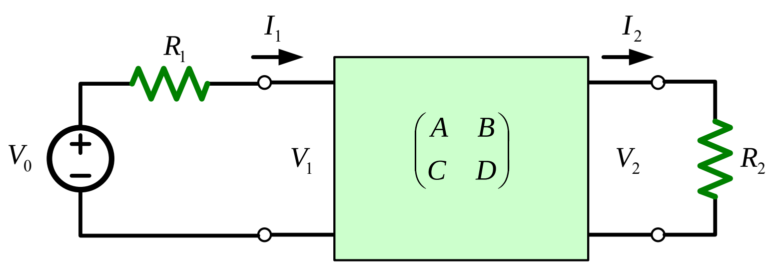

図 2. F 行列

分布定数回路の反射解析は，図 2 の F 行列が便利であり，線路定数から導き出せる [1].

F 行列の電圧と電流は,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

の関係がある.

式(2)～式(5)を, 式(6)に代入して, 式(7)のように, 式(1)の形に変形する. 式の変形の詳細は付録に示す.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}A + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}B - \sqrt{R_1 R_2}C - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D & 2\left(AD - BC\right) \\ 2 & -\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}A + \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}B - \sqrt{R_1 R_2}C + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (7)$$

ここに,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{R_1} & -\left(\sqrt{R_2}A + \frac{1}{\sqrt{R_2}}B\right) \\ \frac{1}{\sqrt{R_1}} & \sqrt{R_2}C + \frac{1}{\sqrt{R_2}}D \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}A + \frac{B}{\sqrt{R_1 R_2}} + \sqrt{R_1 R_2}C + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D \quad \cdots\cdots (8)$$

である. ここで, $R_1 = R_2 = R$ のとき,

$$S_{11} = \frac{\frac{B}{R} - RC}{2A + \frac{B}{R} + RC} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$S_{21} = \frac{2}{2A + \frac{B}{R} + RC} \quad \cdots\cdots (10)$$

となり, S パラメータを F 行列で表すことができる.

2. S パラメータから F 行列への変換

式(2)～式(5)から, a_1, b_1, a_2, b_2 を求め, これらを式(1)に代入して, 左辺に V_1, I_1, 右辺に V_2, I_2 をまとめて整理する. この式を, V_1, I_1 について解くと, 式(6)の形になる.

$R_1 = R_2 = R$ のときに,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{{S_{21}}^2 + \left(1 - {S_{11}}^2\right)}{2S_{21}} & R\frac{-{S_{21}}^2 + \left(1 + S_{11}\right)^2}{2S_{21}} \\ \frac{1}{R} \times \frac{-{S_{21}}^2 + \left(1 - S_{11}\right)^2}{2S_{21}} & \frac{{S_{21}}^2 + \left(1 - {S_{11}}^2\right)}{2S_{21}} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (11)$$

となり, F 行列を S パラメータで表すことができる. なお, 式の変形は, 同様に付録に示した.

3.　F 行列から S パラメータへの変換の計算例

図 2 の線路断面の線路パラメータ R, L, C, G を，周波数に対して求める．線路パラメータと F 行列との関係は，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \dfrac{\sinh \gamma l}{Z_0} & \cosh \gamma l \end{pmatrix} \quad \text{.................................} (12)$$

であり，伝搬定数 γ は，線路の等価回路の定数を用いて，

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad \text{.........................} (13)$$

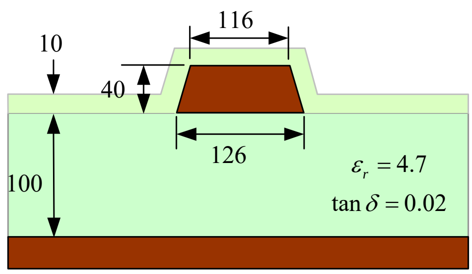

図 2．線路断面

と表される．なお，l は，線路の長さである．

式(12)の F 行列から，$R = 50\Omega$ として式(9)および式(10)を計算する．

図 3 は，$l = 15\text{cm}$ のときの計算結果である．

多くの場合, S パラメータは周波数の直線目盛で表示されるが，対数目盛とすると電気的特性を捉えやすい．

図 4 は，図 3 の周波数軸を対数目盛としたものである．

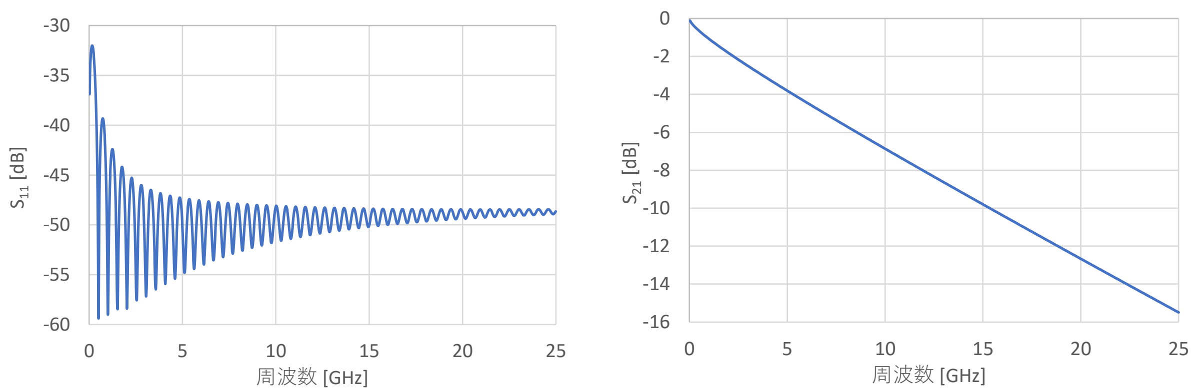

図 3. S_{11} と S_{21} (直線目盛)

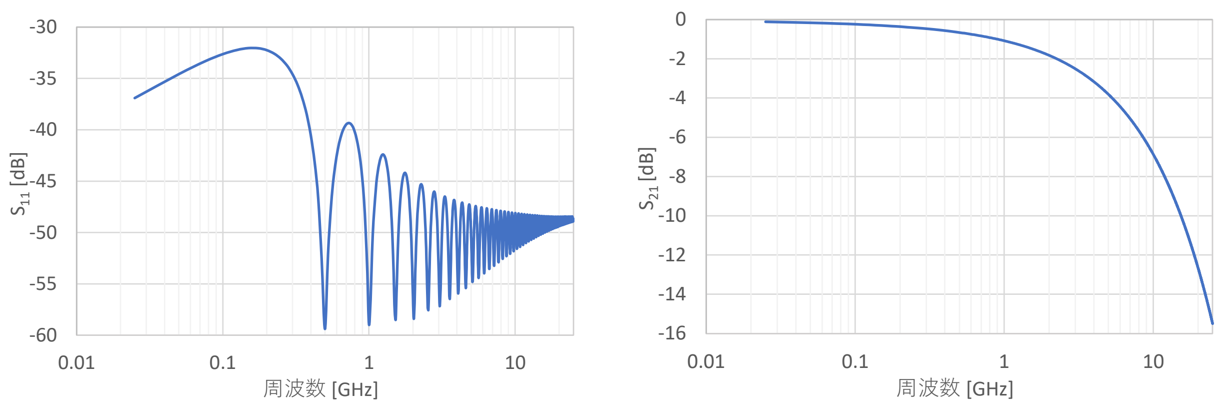

図 4. S_{11} と S_{21} (対数目盛)

さらに，図 4 の S_{21} を，縦軸の絶対値を対数目盛で表すと，図 5 のようになる．

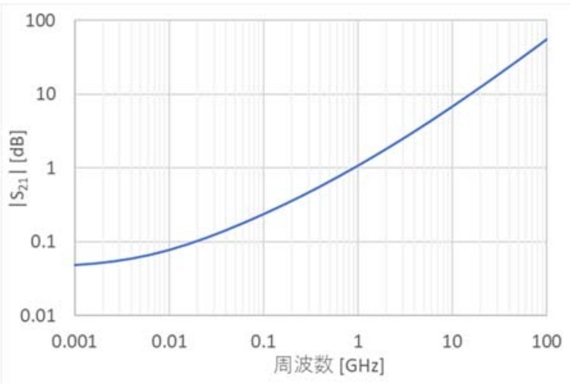

図 5. S_{21} の対数軸表示

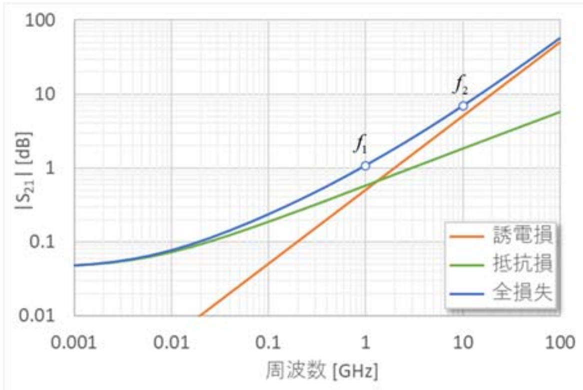

図 6. 抵抗損と誘電損の分離

図 5 の縦軸は，損失を表す．線路の損失は，誘電損と抵抗損との和であり，誘電損は周波数に比例し，抵抗損は，周波数の平方根に比例する．それぞれの比例係数を， a および b とすると，

$$loss = af + b\sqrt{f} \qquad (14)$$

となる．図 5 の，損失が直線とみなせる部分の 2 点の周波数， f_1 と f_2 を選び，式(14)に代入して，係数 a, b に関する連立方程式を解く．

この結果を，図 6 に示す．誘電損は，式(14)の af であり，抵抗損は，非線形部分を含むので，全損失から誘電損を引き算して求める．

このようにすると，単なる S パラメータを眺めるだけでなく，抵抗損と誘電損とに分けて考えることができ，基板設計にも役立てることができる．

4.　波形解析

F 行列を用いると，遠端の電圧 $V_2(\omega)$ は，

$$V_2(\omega) = \frac{1}{A + \frac{B}{R_2} + R_1 C + \frac{R_1}{R_2} D} \times V_0(\omega) \qquad (15)$$

で表される[1]．ここに， R_1 および R_2 はそれぞれ，近端および遠端の抵抗， $V_0(\omega)$ は信号源である．

式(15)をフーリエ逆変換して時間応答を求める．本コラム記載の PRBS や 8B10B を信号源とすることでアイパターンを求めることができる．

まとめ

S パラメータと F 行列とを相互に変換する方法について述べた．

このどちらかのデータが得られたときに，他方に変換したほうが解析や検討に活かしやすい場合があるので，是非変換して役立てていただきたい．

参考文献

1) 碓井有三 ：ボード設計者のための分布定数回路のすべて（改訂 3 版） 自費出版 (http://radioy.a.la9.jp/), pp. 156-162, 2016

付録

F 行列 → S パラメータ

式(2)～式(6)を再掲する.

$$V_1 = (a_1 + b_1)\sqrt{R_1} \qquad \cdots\cdots (2)$$

$$V_2 = (a_2 + b_2)\sqrt{R_2} \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$I_1 = \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_1}} \qquad \cdots\cdots (4)$$

$$I_2 = -\frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_2}} \qquad \cdots\cdots (5)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (6)$$

式(6)に，式(2)～式(5)を代入して式(付 1)および式(付 2)を得る.

$$(a_1 + b_1)\sqrt{R_1} = (a_2 + b_2)\sqrt{R_2}A - \frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_2}}B \qquad \cdots\cdots (付 1)$$

$$\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{R_1}} = (a_2 + b_2)\sqrt{R_2}C - \frac{a_2 - b_2}{\sqrt{R_2}}D \qquad \cdots\cdots (付 2)$$

式(付 1)，式(付 2)を，左辺にb，右辺にaをまとめる.

$$\sqrt{R_1}b_1 - \left(\sqrt{R_2}A + \frac{1}{\sqrt{R_2}}B\right)b_2 = -\sqrt{R_1}a_1 + \left(\sqrt{R_2}A - \frac{1}{\sqrt{R_2}}B\right)a_2 \qquad \cdots\cdots (付 3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}}b_1 + \left(\sqrt{R_2}C + \frac{1}{\sqrt{R_2}}D\right)b_2 = \frac{1}{\sqrt{R_1}}a_1 - \left(\sqrt{R_2}C - \frac{1}{\sqrt{R_2}}D\right)a_2 \qquad \cdots\cdots (付 4)$$

式(付 3)，式(付 4)を行列表示して，

$$\begin{pmatrix} \sqrt{R_1} & -\left(\sqrt{R_2}A + \frac{1}{\sqrt{R_2}}B\right) \\ \frac{1}{\sqrt{R_1}} & \sqrt{R_2}C + \frac{1}{\sqrt{R_2}}D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{R_1} & \sqrt{R_2}A - \frac{1}{\sqrt{R_2}}B \\ \frac{1}{\sqrt{R_1}} & -\left(\sqrt{R_2}C - \frac{1}{\sqrt{R_2}}D\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (付 5)$$

を得る.

式(付 5)から$\boldsymbol{b}$を求めると，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_1} & -\left(\sqrt{R_2}A + \frac{1}{\sqrt{R_2}}B\right) \\ \frac{1}{\sqrt{R_1}} & \sqrt{R_2}C + \frac{1}{\sqrt{R_2}}D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\sqrt{R_1} & \sqrt{R_2}A - \frac{1}{\sqrt{R_2}}B \\ \frac{1}{\sqrt{R_1}} & -\left(\sqrt{R_2}C - \frac{1}{\sqrt{R_2}}D\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (付 6)$$

となる．ここで，

$$\begin{pmatrix} \sqrt{R_1} & -\left(\sqrt{R_2}A+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}B\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} & \sqrt{R_2}C+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sqrt{R_2}C+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}D & \left(\sqrt{R_2}A+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}B\right) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{R_1}} & \sqrt{R_1} \end{pmatrix} \quad \text{(付 7)}$$

であり，

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{R_1} & -\left(\sqrt{R_2}A+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}B\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} & \sqrt{R_2}C+\dfrac{1}{\sqrt{R_2}}D \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}A+\frac{B}{\sqrt{R_1R_2}}+\sqrt{R_1R_2}C+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}D \quad \text{(付 8)}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}A+\dfrac{1}{\sqrt{R_1R_2}}B-\sqrt{R_1R_2}C-\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}D & 2(AD-BC) \\ 2 & -\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}A+\dfrac{1}{\sqrt{R_1R_2}}B-\sqrt{R_1R_2}C+\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{(付 9)}$$

となる．したがって，

$$S_{11} = \frac{A+\dfrac{B}{R_2}-R_1C-\dfrac{R_1}{R_2}D}{A+\dfrac{B}{R_2}+R_1C+\dfrac{R_1}{R_2}D} \quad \text{(付 10)}$$

$$S_{12} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\times\frac{2}{A+\dfrac{B}{R_2}+R_1C+\dfrac{R_1}{R_2}D} \quad \text{(付 11)}$$

$$S_{21} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\times\frac{2}{A+\dfrac{B}{R_2}+R_1C+\dfrac{R_1}{R_2}D} \quad \text{(付 12)}$$

$$S_{22} = \frac{-A+\dfrac{B}{R_2}-R_1C+\dfrac{R_1}{R_2}D}{A+\dfrac{B}{R_2}+R_1C+\dfrac{R_1}{R_2}D} \quad \text{(付 13)}$$

となる．

S パラメータ → F 行列

式(2)～式(5)から，

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{\sqrt{R_1}}+\sqrt{R_1}I_1\right) \quad \text{(付 14)}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} I_1 \right) \quad \text{(付 15)}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_2}{\sqrt{R_2}} - \sqrt{R_2} I_2 \right) \quad \text{(付 16)}$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{V_2}{\sqrt{R_2}} + \sqrt{R_2} I_2 \right) \quad \text{(付 17)}$$

式(付 14)～式(付 17)を式(1)に代入して，式(付 18)を得る.

式(1)を再掲する.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{V_1}{\sqrt{R_1}} - \sqrt{R_1} I_1 \\ \dfrac{V_2}{\sqrt{R_2}} + \sqrt{R_2} I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{V_1}{\sqrt{R_1}} + \sqrt{R_1} I_1 \\ \dfrac{V_2}{\sqrt{R_2}} - \sqrt{R_2} I_2 \end{pmatrix} \quad \text{(付 18)}$$

式(付 18)を，左辺にV_1, I_1，右辺にV_2, I_2をまとめて整理すると,

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}}(1-S_{11})V_1 - \sqrt{R_1}(1+S_{11})I_1 = \frac{S_{12}}{\sqrt{R_2}}V_2 - S_{12}\sqrt{R_2} I_2 \quad \text{(付 19)}$$

$$\frac{S_{21}}{\sqrt{R_1}}V_1 + S_{21}\sqrt{R_1} I_1 = \frac{1}{\sqrt{R_2}}(1-S_{22})V_2 + \sqrt{R_2}(1+S_{22})I_2 \quad \text{(付 20)}$$

を得る．両式を行列表示すると,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{R_1}}(1-S_{11}) & -\sqrt{R_1}(1+S_{11}) \\ \dfrac{S_{21}}{\sqrt{R_1}} & S_{21}\sqrt{R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{S_{12}}{\sqrt{R_2}} & -S_{12}\sqrt{R_2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}(1-S_{22}) & \sqrt{R_2}(1+S_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{(付 21)}$$

となる．左辺の係数の逆行列は,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{R_1}}(1-S_{11}) & -\sqrt{R_1}(1+S_{11}) \\ \dfrac{S_{21}}{\sqrt{R_1}} & S_{21}\sqrt{R_1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} S_{21}\sqrt{R_1} & \sqrt{R_1}(1+S_{11}) \\ -\dfrac{S_{21}}{\sqrt{R_1}} & \dfrac{1}{\sqrt{R_1}}(1-S_{11}) \end{pmatrix} \quad \text{(付 22)}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_1}}\left(1-S_{11}\right) & -\sqrt{R_1}\left(1+S_{11}\right) \\ \frac{S_{21}}{\sqrt{R_1}} & S_{21}\sqrt{R_1} \end{vmatrix} = 2S_{21} \quad \text{(付 23)}$$

式(付 22)を式(付 21)に掛けて,

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2S_{21}} \begin{pmatrix} S_{21}\sqrt{R_1} & \sqrt{R_1}\left(1+S_{11}\right) \\ -\frac{S_{21}}{\sqrt{R_1}} & \frac{1}{\sqrt{R_1}}\left(1-S_{11}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{S_{12}}{\sqrt{R_2}} & -S_{12}\sqrt{R_2} \\ \frac{1}{\sqrt{R_2}}\left(1-S_{22}\right) & \sqrt{R_2}\left(1+S_{22}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{(付 24)}$$

式(付 24)の右辺の係数を整理すると,

$$\frac{1}{2S_{21}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left\{S_{21}S_{12}+\left(1+S_{11}\right)\left(1-S_{22}\right)\right\} & \sqrt{R_1R_2}\left\{-S_{12}S_{21}+\left(1+S_{11}\right)\left(1+S_{22}\right)\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\left\{-S_{12}S_{21}+\left(1-S_{11}\right)\left(1-S_{22}\right)\right\} & \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\left\{S_{12}S_{21}+\left(1-S_{11}\right)\left(1+S_{22}\right)\right\} \end{pmatrix} \quad \text{(付 25)}$$

となる．これが F 行列である．$R_1 = R_2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{{S_{21}}^2+\left(1-{S_{11}}^2\right)}{2S_{21}} & R\frac{-{S_{21}}^2+\left(1+S_{11}\right)^2}{2S_{21}} \\ \frac{1}{R}\times\frac{-{S_{21}}^2+\left(1-S_{11}\right)^2}{2S_{21}} & \frac{{S_{21}}^2+\left(1-{S_{11}}^2\right)}{2S_{21}} \end{pmatrix} \quad \text{(付 26)}$$

となる．