

# 伝送線路の特性インピーダンス測定

この表題を見て、何をいまさらと思う人もいるかもしれない。

プリント配線板のパターンやケーブルの特性インピーダンスは、TDR(Time Domain Reflectometry)で測定するのがほぼ常識である。

本稿では、あえて、TDR について述べる。

## 1. 近端から見た線路のインピーダンス<sup>1)</sup>

本論に入る前に、図 1 のように、遠端に抵抗  $R$  を接続したときの近端から見た線路のインピーダンス  $Z$  を求める。

線路の特性インピーダンスは  $Z_0$ 、遅延時間を  $\tau$  とする。

線路を縦続行列(F-Matrix)で表すと、

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

であり、縦続行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & jZ_0 \sin \omega\tau \\ j\frac{1}{Z_0} \sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

である。遠端(端子 2)は、

$$V_2 = RI_2 \dots\dots\dots (3)$$

であるから、

$$V_1 = \cos \omega\tau \times RI_2 + jZ_0 \sin \omega\tau \times I_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$I_1 = j\frac{1}{Z_0} \sin \omega\tau \times RI_2 + \cos \omega\tau \times I_2 \dots\dots\dots (5)$$

となり、辺々割り算して、

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R \cos \omega\tau + jZ_0 \sin \omega\tau}{Z_0 \cos \omega\tau + jR \sin \omega\tau} \times Z_0 \dots\dots\dots (6)$$

を得る。図 2 に、 $R$  をパラメータにして式(6)の近端から見たインピーダンスを示す。周波数と  $R$  によってインピーダンスが変わるので、いわゆるインピーダンスメータでは測定できない。理論上は、 $R$  を変化させてインピーダンスが周波数特性を持たないときのインピーダンスが特性インピーダンスになるが、実用的な測定方法とはいえない。

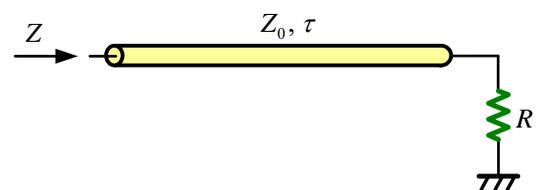


図 1. 遠端に抵抗を接続した線路

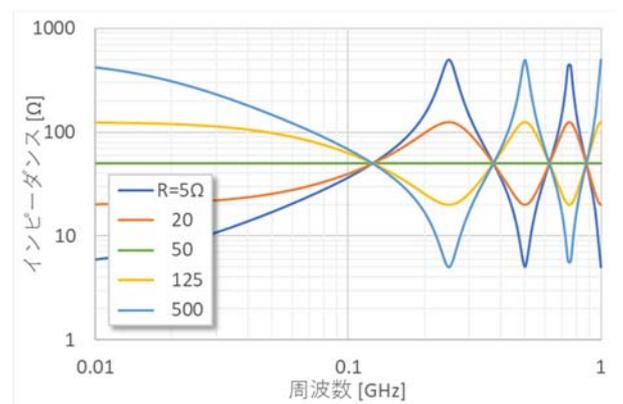


図 2. 近端から見た線路のインピーダンス

## 2. TDR の原理

特性インピーダンスは、TDR(Time Domain Reflectometry)で測定するのが一般的である。

図 3 は、その原理図である。

同図の接続ケーブルは、信号源の出力インピーダンス  $Z_0$  に整合されているので、この存在を無視できる。すなわち、信号源の出力インピーダンス  $Z_0$  に直結されていると考えてもよい。

測定点の電圧  $v_x$  は、

$$v_x = \frac{Z_x}{Z_0 + Z_x} \times v_0 \dots\dots\dots (7)$$

である。式(7)から DUT の特性インピーダンス  $Z_x$  を求めると、

$$Z_x = \frac{v_x}{v_0 - v_x} \times Z_0 \dots\dots\dots (8)$$

となる。図 4 は、 $Z_x = 60\Omega$  のときの図 3 の測定点の電圧波形、図 5 は、これを式(8)により、インピーダンスに変換したものである。

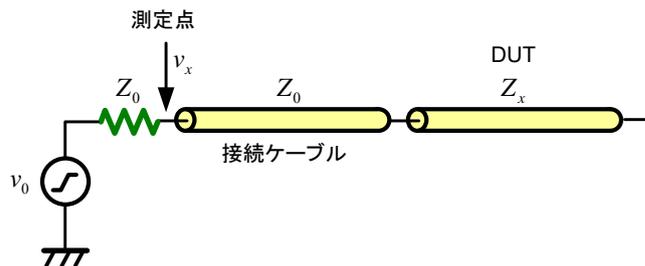


図 3. TDR の原理

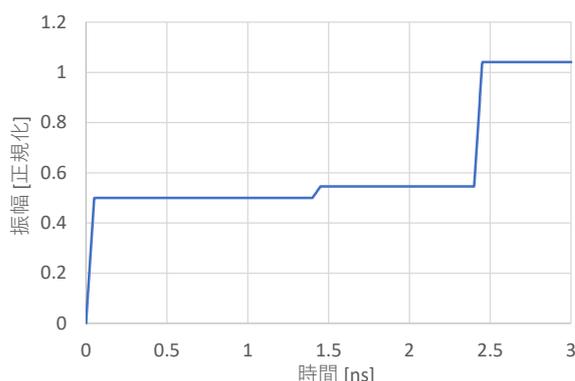


図 4. TDR の波形

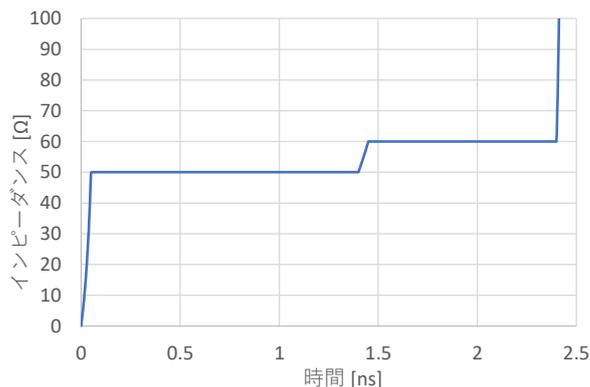


図 5. インピーダンスへの変換

図 5 の最初のステップの  $50\Omega$  は、接続ケーブルの特性インピーダンスで、次のステップの  $60\Omega$  が DUT の特性インピーダンスである。

## 3. ビアの測定

DUT の線路にビアを含む場合の TDR 測定を考える。

図 6 は、コネクタやビアの等価回路の例である。その形から、(a)は  $\pi$  型(CLC)、(b)は T 型(LCL)と呼ばれる ( $\pi$ :ギリシャ文字小文字のパイ)。物理的な構造から推測して、ビアは(a)の  $\pi$  型を、コネクタは(b)の T 型を用いることが多いが、実際にはもう少し複雑な等価回路を用いることもあるし、特にコネクタでは隣接端子との間の結合もモデル化される。

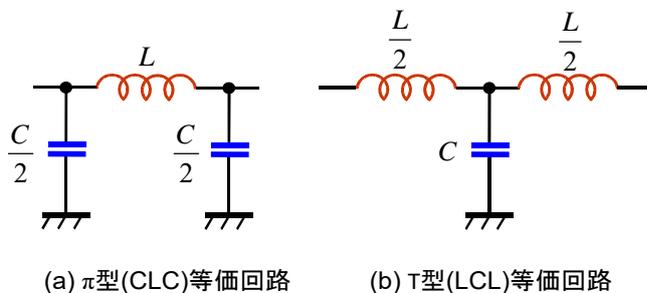


図 6. コネクタやビアの等価回路

図7は、コネクタやビアを含む線路の TDR の回路を示す。原理を確認するのみなので、接続のためのケーブルは省略した。

図8は、影響を誇張して見るために、信号の立ち上がりを極めて速い 10ps としたときの  $\pi$  型と T 型の TDR 波形を解析して、インピーダンスに変換したものである。10ps の立ち上がりを持つ TDR は、たぶん実在しない程度と考える。図9は、実在する 50ps の立ち上がりで解析した結果である。

TDR のパルスの立ち上がり時間で、観測波形が異なることを意識しておく必要がある。

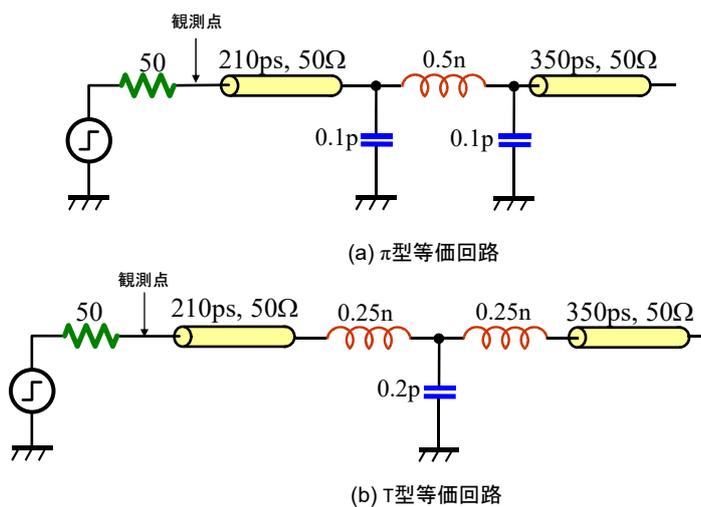


図7. ビアの TDR

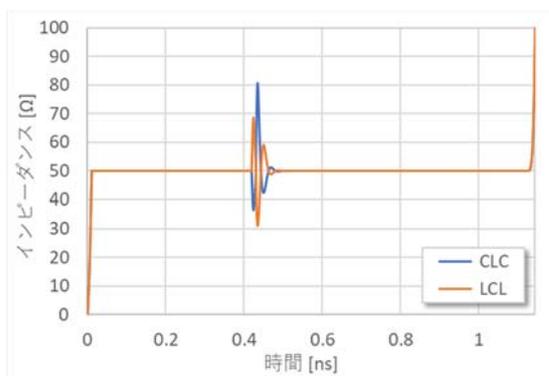


図8. tr=10ps のときのインピーダンス

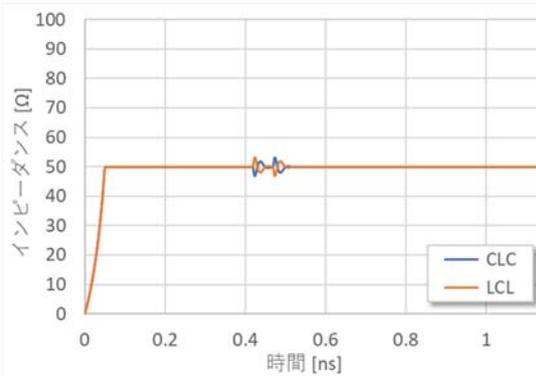


図9. tr=50ps のときのインピーダンス

#### 4. 縦続線路の TDR

2 本以上の線路が縦続接続されている場合の TDR の測定について考える。

接続ケーブルの 50  $\Omega$  の次のステップが最初の線路のインピーダンスであることは容易に分かる。

図10は縦続接続された2本線路の TDR 測定の場合を示す。

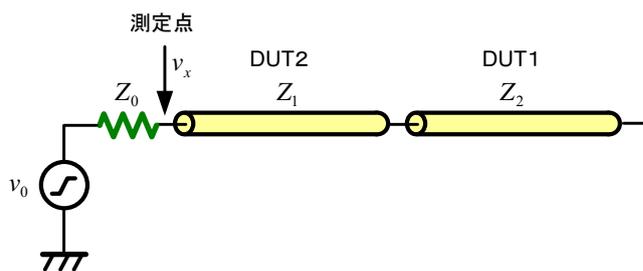


図10. 縦続接続されたときの TDR

同図の測定点の電圧  $v_x$  を求める。その方法

は、(1)格子線図 と (2)縦続行列 の二つを紹介する。

##### (1)格子線図<sup>2)</sup>

図11は、2本の縦続線路の反射を求める格子線図である。

最初の立ち上がりは、1本線路のときと同様に、

$$v_1 = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} v_0 \dots\dots\dots (9)$$

である。  $v_1$  が線路1と線路2の接続点で反射する。反射波  $v_2$  は、

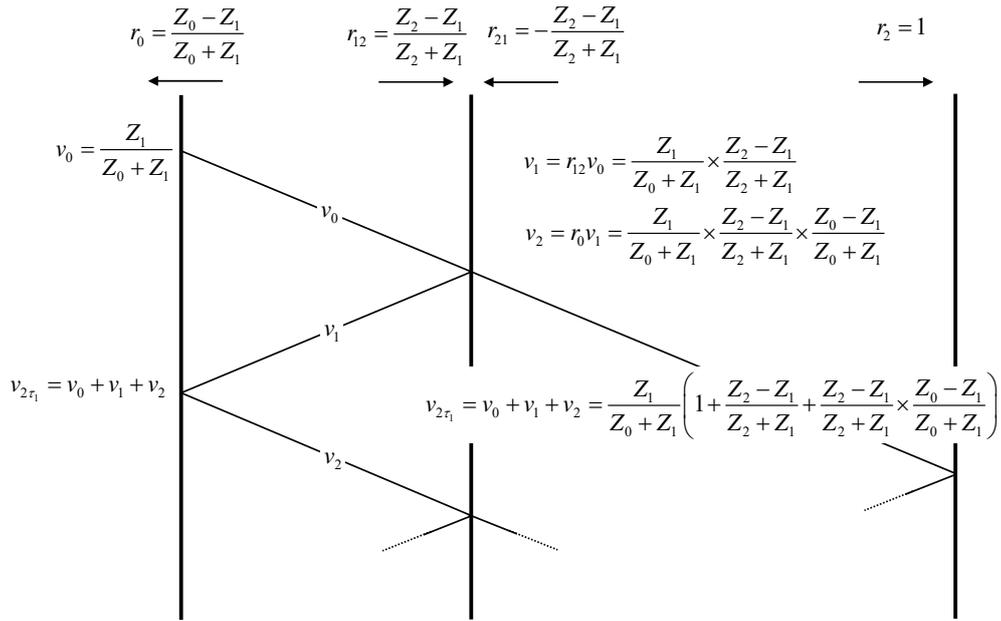


図 11. 縦続線路の格子線図

$$v_2 = r_{12}v_1 = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \times \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} v_0 \dots\dots\dots (10)$$

となる。これが近端で反射して  $v_3$  となる。すなわち、

$$v_3 = r_0v_2 = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \times \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \times \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} v_0 \dots\dots\dots (11)$$

となる。2 番目のステップ  $v_{2\tau_1}$  は、

$$v_{2\tau_1} = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \left( 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \times \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} \right) v_0 \dots\dots\dots (12)$$

となる。

$v_{2\tau_1}$  を  $v_x$  とおいて、式(8)によりインピーダンスを計算する。

(2)縦続行列<sup>1)</sup>

線路の縦続行列は、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & jZ_0 \sin \omega\tau \\ j \frac{\sin \omega\tau}{Z_0} & \cos \omega\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2} & Z_0 \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2} \\ \frac{1}{Z_0} \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2} & \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

である。三角関数よりもこの場合、指数関数の方が計算しやすい。

2 本線路の場合、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{j\omega\tau_1} + e^{-j\omega\tau_1}}{2} & Z_1 \frac{e^{j\omega\tau_1} - e^{-j\omega\tau_1}}{2} \\ \frac{1}{Z_1} \frac{e^{j\omega\tau_1} - e^{-j\omega\tau_1}}{2} & \frac{e^{j\omega\tau_1} + e^{-j\omega\tau_1}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{j\omega\tau_2} + e^{-j\omega\tau_2}}{2} & Z_2 \frac{e^{j\omega\tau_2} - e^{-j\omega\tau_2}}{2} \\ \frac{1}{Z_2} \frac{e^{j\omega\tau_2} - e^{-j\omega\tau_2}}{2} & \frac{e^{j\omega\tau_2} + e^{-j\omega\tau_2}}{2} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

図 10 の観測点の電圧  $v_x$  は,

$$v_x = \frac{A}{A + CZ_0} v_0 \dots\dots\dots (15)$$

である。

式(14)の行列の  $A$  と  $C$  を求める。

$$A = A_1 A_2 + B_1 C_2 = \frac{1}{4} (e^{j\omega\tau_1} + e^{-j\omega\tau_1}) (e^{j\omega\tau_2} + e^{-j\omega\tau_2}) + \frac{Z_1}{4Z_2} (e^{j\omega\tau_1} - e^{-j\omega\tau_1}) (e^{j\omega\tau_2} - e^{-j\omega\tau_2}) \dots\dots\dots (16)$$

$$C = C_1 A_2 + D_1 C_2 = \frac{1}{4Z_1} (e^{j\omega\tau_1} - e^{-j\omega\tau_1}) (e^{j\omega\tau_2} + e^{-j\omega\tau_2}) + \frac{1}{4Z_2} (e^{j\omega\tau_1} + e^{-j\omega\tau_1}) (e^{j\omega\tau_2} - e^{-j\omega\tau_2}) \dots\dots\dots (17)$$

式(16), 式(17)を式(15)に代入して,

$$v_x = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \times \frac{1 - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{j\omega(-2\tau_2)} - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{j\omega(-2\tau_1)} + e^{j\omega(-2\tau_1 - 2\tau_2)}}{1 - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{j\omega(-2\tau_2)} + \frac{(Z_0 - Z_1)(Z_1 - Z_2)}{(Z_0 + Z_1)(Z_1 + Z_2)} e^{j\omega(-2\tau_1)} - \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} e^{j\omega(-2\tau_1 - 2\tau_2)}}} v_0 \dots\dots\dots (18)$$

式(18)の分母をマクローリン展開して, 分子に掛けて,  $e^{j\omega(-2\tau_1)}$  の項を求めると,

$$v_x = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} \left\{ 1 + \left( -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{(Z_0 - Z_1)(Z_1 - Z_2)}{(Z_0 + Z_1)(Z_1 + Z_2)} \right) e^{j\omega(-2\tau_1)} + \dots \right\} v_0 \dots\dots\dots (19)$$

となって, 式(12)と同じ結果が得られた。

式(18)をそのまま周波数の関数として計算して, フーリエ逆変換すると, 全体の反射の波形を求めることができる。

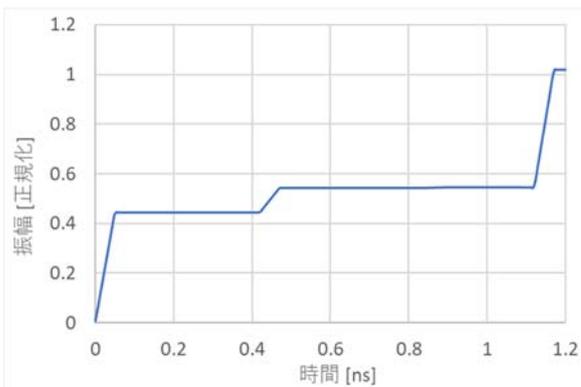


図 12. 近端の電圧波形

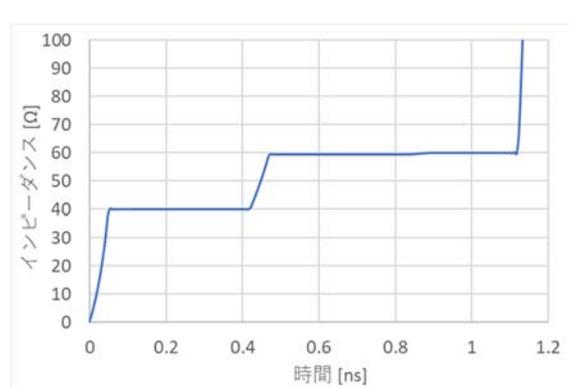


図 13. インピーダンスに換算

図 12 は, 式(18)を逆フーリエ変換して電圧波形として求めたものである。図 13 は, これを式(8)によりインピ

ーダンスに換算したものである。図 10 において、 $Z_1 = 40\Omega$ 、 $Z_2 = 60\Omega$ としたもので、図 13 の最初のステップは、 $40\Omega$ であるが、次のステップは、 $59.46\Omega$ で、 $60\Omega$ よりわずかに小さい。

式(12)を式(8)に代入して、インピーダンス換算した $Z_x$ を計算すると、

$$Z_x = \frac{v_{2r_1}}{1-v_{2r_1}} Z_0 = \frac{\frac{Z_1}{Z_0+Z_1} \times \frac{2Z_0Z_2+2Z_1Z_2-Z_0Z_1+Z_1^2+Z_0Z_2-Z_1Z_2}{(Z_0+Z_1)(Z_1+Z_2)}}{1-\frac{Z_1}{Z_0+Z_1} \times \frac{2Z_0Z_2+2Z_1Z_2-Z_0Z_1+Z_1^2+Z_0Z_2-Z_1Z_2}{(Z_0+Z_1)(Z_1+Z_2)}} Z_0$$

$$= \frac{3Z_0Z_2+Z_1Z_2-Z_0Z_1+Z_1^2}{Z_0Z_1+Z_0Z_2+3Z_1^2-Z_1Z_2} Z_1 \dots\dots\dots (20)$$

となる。式(20)を、 $Z_1$ をパラメータにして、 $Z_2$ と $Z_x$ との関係を求めると、図 14 のようになる。

$Z_1$ が  $40\Omega$ から  $60\Omega$ 程度の場合には、 $Z_2$ も数%の誤差で読み取ることができる。

## 5. まとめ

TDR は、線路の片端に信号を加えて、その反射波形を用いて、線路の特性インピーダンスやビアなどの不連続点を観測することができる。

反射波形の意味、加える信号の立ち上がり時間など、よく考えて活用することが重要である。

なお、TDR の測定波形が傾きを持つことについては、以下に詳述しているので参考にしていただきたい。

[TDR の波形の傾きの理由](#)

<https://www.macnica.co.jp/business/semiconductor/articles/basic/133762/>

## 参考文献

- 1) 碓井有三：“ボード設計者のための分布定数回路のすべて 第 3 版”，自費出版，  
(<http://home.wondernet.ne.jp/~usuivy/>)，pp.156-161，2016
- 2) 前掲 1)，pp.28-33

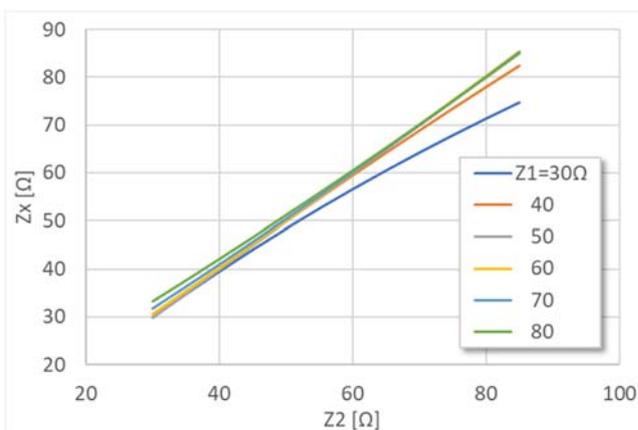


図 14.  $Z_1$  を変えたときの  $Z_2$  と  $Z_x$  との関係