碓井　有三

線路の損失　抵抗損と誘電損 02 版

1.　損失線路の等価回路と基本式 [1),2),3)]

分布定数の等価回路は，通常，インダクタ L とキャパシタ C で構成された，いわゆる無損失線路である．

実際の回路には，図 1 に示すように，インダクタと直列に抵抗 R が存在し，キャパシタと並列に漏れコンダクタンス G が存在するので，有損失線路である．なお，同図は，微小区間の線路長 Δx における等価回路であり，回路素子は，単位長あたりの値であるから，それぞれ Δx を乗じて示している．

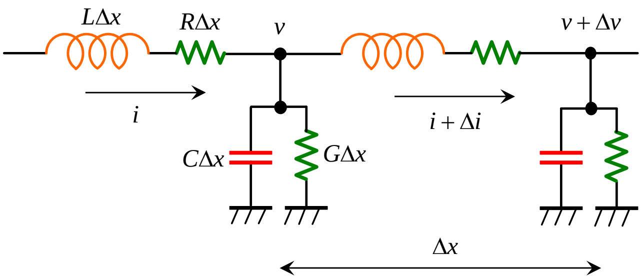


図 1．損失線路の等価回路

分布定数線路に，これらの損失項を盛り込むと，計算が複雑となり，解析的な解を求めるのは容易ではない．

図 1 の電圧と電流の式を立てる．

$$-\Delta v = L\Delta x\frac{di}{dt} + R\Delta xi \quad \cdots\cdots (1)$$

$$-\Delta i = C\Delta x\frac{dv}{dt} + G\Delta xv \quad \cdots\cdots (2)$$

両式を Δx で割って，$\Delta x \to 0$ とすると式(3)および式(4)の偏微分方程式となる．

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri \quad \cdots\cdots (3)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv \quad \cdots\cdots (4)$$

上式をそれぞれラプラス変換する．

$$-\frac{dV}{dx} = sLI + RI \quad \cdots\cdots (5)$$

$$-\frac{dI}{dx} = sCV + GV \quad \cdots\cdots (6)$$

式(5)の両辺を x で微分して式(6)を代入すると，

$$\frac{d^2V}{dx^2} - (sL+R)(sC+G)V = 0 \quad \cdots\cdots (7)$$

を得る．式（7）は，

$$V = e^{\pm\sqrt{(sL+R)(sC+G)}x} \quad \cdots\cdots (8)$$

の解を持つ．この指数の肩の根号は，

$$\sqrt{(sL+R)(sC+G)} = s\sqrt{LC}\left\{1+\frac{1}{s}\left(\frac{G}{C}+\frac{R}{L}\right)+\frac{1}{s^2}\frac{RG}{LC}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (9)$$

であり，右辺{ }内の第 3 項は，$s = j\omega$ と置いたときに $G \ll \omega C$, $R \ll \omega L$ と考えると 1 に比べて無視できるので，

$$\sqrt{(sL+R)(sC+G)} \cong s\sqrt{LC}\left\{1+\frac{1}{2s}\left(\frac{G}{C}+\frac{R}{L}\right)\right\} = \frac{s}{u}+\frac{1}{2}\left(GZ_0+\frac{R}{Z_0}\right) \quad \cdots\cdots (10)$$

となる．ここに，$u = 1/\sqrt{LC}$，$Z_0 = \sqrt{L/C}$ である．u，Z_0 は，無損失のときに，線路を信号が進む速度および線路の特性インピーダンスである．

式(8)は，

$$V = \exp\left[\pm\left\{\frac{1}{2}\left(GZ_0+\frac{R}{Z_0}\right)+\frac{s}{u}\right\}x\right] \quad \cdots\cdots (11)$$

となり，その一般解は，

$$V = A_1(s)e^{-\left(\alpha x+\frac{x}{u}s\right)} + A_2(s)e^{+\left(\alpha x+\frac{x}{u}s\right)} \quad \cdots\cdots (12)$$

である．ここに，

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(GZ_0+\frac{R}{Z_0}\right) \quad \cdots\cdots (13)$$

である．

式(12)の第 1 項の，$A_1(s)e^{-\alpha x}$ は，x の増加する方向に振幅が指数的に減衰し，$A_1(s)e^{-\frac{x}{u}s}$ は，x/u に比例する遅延である．したがって，第 1 項は，x の増加する方向に進む波，すなわち右行波である．同様に，同式第 2 項は，逆方向に進む左行波である．

2.　誘電損 [3),4)]

ボードを構成する誘電体(例えばガラスエポキシ)の誘電率は，厳密には実数ではなく，わずかな虚数部を含む．したがって，等価回路で表すと，図 1 に示すように，キャパシタ C に漏れコンダクタンス G が並列に接続された形になる．

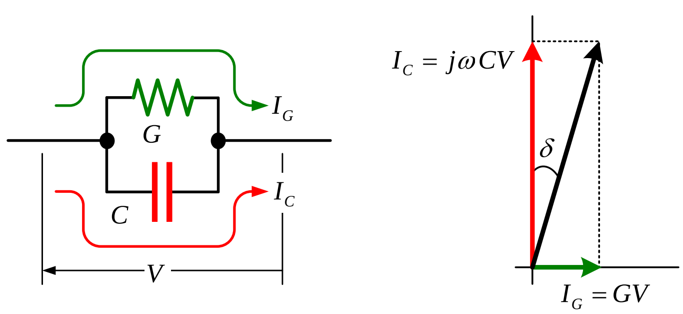
図 2(a)は，この C と G の部分抜き出したものである．両端の電圧を V とすると，C に流れる電流 I_C と G に流れる電流 I_G は，

$$I_C = j\omega CV \quad \cdots\cdots (14)$$

$$I_G = GV \quad \cdots\cdots (15)$$

である．同図(b)はこれらを複素平面上に表したものである．両者のなす角を δ とすると，漏れコンダクタンス G は，

$$G = \omega C \tan\delta \quad \cdots\cdots (16)$$



(a) キャパシタとコンダクタの電流　　(b) 複素平面表示

図 2 誘電正接

と表される.

この δ を損失角といい，$\tan\delta$ を誘電正接または loss tangent という．一般に使用されている，ガラスエポキシ基板（FR-4）では，$\tan\delta$=0.02 程度であるが，低損失用に 0.005 以下のものも実用化されている.

式（11）の右辺を展開したときの第 1 項が誘電損であり，同式に式（15）を代入し，$\sqrt{L/C}=Z_0$，$\sqrt{LC}=\sqrt{\varepsilon_r}/c$，$c=3\times10^8\ \mathrm{m/s}$，$\log(e)=0.434$ であるから，単位長あたりのデシベルで表した誘電損は，

$$20\times\log\left\{\exp\left(\frac{1}{2}GZ_0\right)\right\}=91\times\tan\delta\times\sqrt{\varepsilon_r}\times f\left(\mathrm{GHz}\right)\left(\mathrm{dB/m}\right) \quad\text{(17)}$$

となって，デシベル表記の損失が，$\tan\delta$ と周波数 f とに比例することが分かる.

3. 抵抗損 3),4)

3.1. 表皮効果

導体に高周波の電流を流すと，電流は表面に集まろうとして，内部の電流は小さくなり，見かけ上の断面積は小さくなる．このことを，表皮効果（skin effect）という.

図 3 は，導体表面の電流密度を 1 に正規化したときの，表面からの距離における電流密度を示したものである．導体表面の電流密度を I_0 とすると，表面からの距離 x における電流密度 I_x は，図 3 に示すように，表面から指数関数で減少する．すなわち，

$$I_x=I_0e^{-\frac{x}{d}} \quad\text{(18)}$$

である．ここに，d は表皮の深さ（skin depth）で，

$$d=\sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad\text{(19)}$$

と表され，周波数の平方根に反比例する．ここに，ω は，高周波電流の角周波数，σ は導体の導電率，μ は導体の透磁率である．図 3 のグラフの上部の横軸の目盛りは，銅の 1GHz における表面からの距離を示す.

図 3 の指数関数（右上がりの斜線部）を深さ方向に無限積分すると，図 3 の緑色の矩形の面積に等しくなる．すなわち，

$$\sum I=\int_0^\infty I_x dx=d \quad\text{(20)}$$

である．すなわち，全電流は，表面と同じ電流が深さ d まで均等に流れているとしたとき（直流の場合）の電流に等しい．これが表皮の深さという意味でもある.

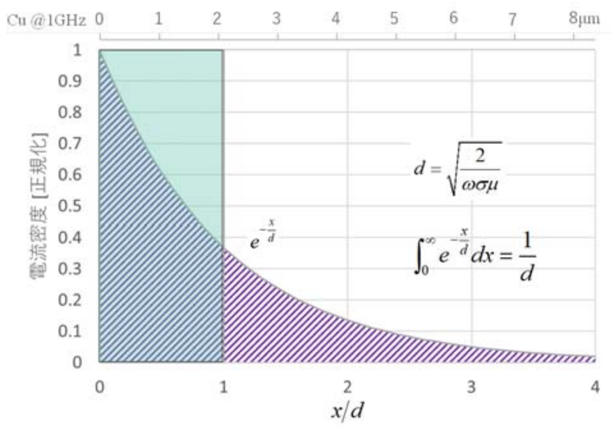


図 3 表皮効果(電流密度)

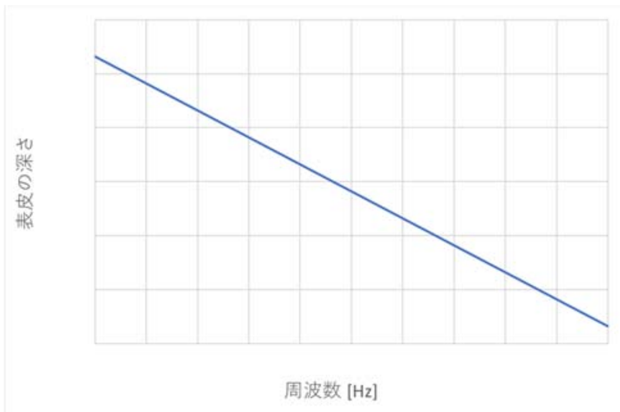


図 4 表皮の深さの周波数特性

図 4 は，銅の表皮の深さを周波数に対して示したものであり，図 5 は，実際に表皮（電流密度）を解析した，100MHz と 1GHz の結果である．図は，パターン幅 $W=100\mu\mathrm{m}$，パターン厚 $t=18\mu\mathrm{m}$ の例である．

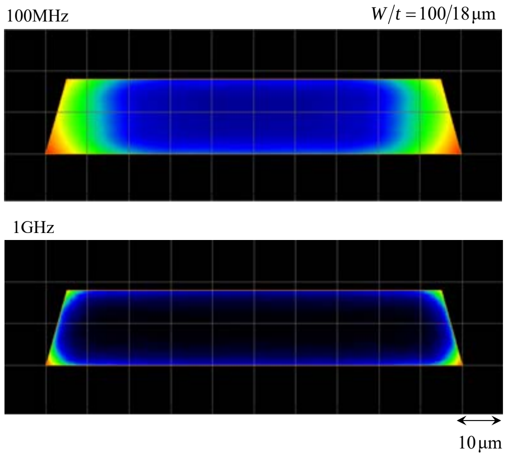


図 5 表皮の解析結果

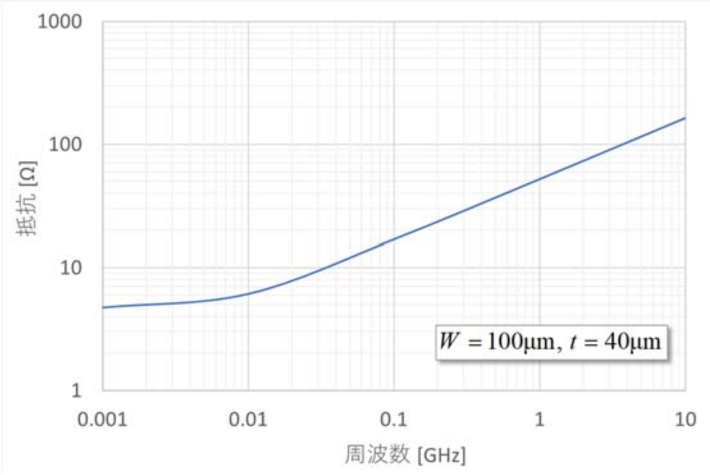


図 6 表皮抵抗の解析結果

3.2. 表皮抵抗と抵抗損

表皮の深さが周波数の平方根に反比例するので，ボードのパターンの抵抗も周波数の平方根に比例することが予想できる．図 6 は表皮抵抗の解析例である．高い周波数では，抵抗は周波数の平方根に比例して増加し，低い周波数では直流に向かって，直流抵抗に漸近する．

式（11）の右辺の第 2 項が抵抗による損失（抵抗損）である．

単位長あたりのデシベルで表した抵抗損は，

$$20\times\log\left\{\exp\left(\frac{R}{2Z_0}\right)\right\}=10\times\log(e)\times\frac{R}{Z_0}\ (\mathrm{dB/m}) \quad (21)$$

となり，抵抗の値に比例する．

図 7 に，式(17)の誘電損を，パターン幅 W を変化させて，また，式(21)の抵抗損を，tan δ を変化させて示す．

線路損失が周波数特性を持つため，伝送波形に大きな影響を及ぼす．これについては，また改めて述べる．

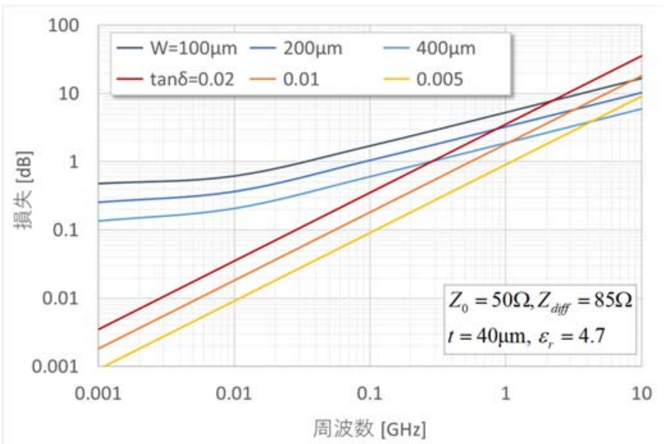


図 7 ボード損失の周波数特性

参考文献

1) 碓井有三：“ボード設計者のための分布定数回路のすべて 第 3 版”，自費出版，（http://home.wondernet.ne.jp/~usuiy/），pp.171-173，2016

2) 碓井 有三：“ボード上の GHz 動作 定量分析が最適な処方箋”，日経エレクトロニクス，No.812,

p.113, 2002 年
3) 碓井 有三：“高周波高速伝送路設計の基礎”，マイクロウェーブ ワークショップ MWE2016 基礎講座，pp.1-5, https://apmc-mwe.org/mwe2017/pdf/tut16/WE3B-1.pdf , 2016 年
4) 前掲 1), pp.190-192

02 版 図 6 および図 7 差し替え