

クロストークの解析

クロストーク解析は、1 対 1 伝送の解析に比べるとかなり煩雑、難解である。

解析は、以下のような方法がある。以下の、1 および 2 は、参考文献に詳述しているので本稿では詳しい説明は割愛する。

1. 右行波と左行波をステップ・バイ・ステップで求める

近端および遠端において、右行波と左行波それぞれが隣接線路におよぼす影響をステップ・バイ・ステップで繰り返し求める方法である。

能動線路から受動線路へのクロストークだけでなく、その逆の、受動線路から能動線路へのクロストークも考慮する。

クロストークの発生原理を理解するのに適しているが、実際のクロストークを求めるには適していない。

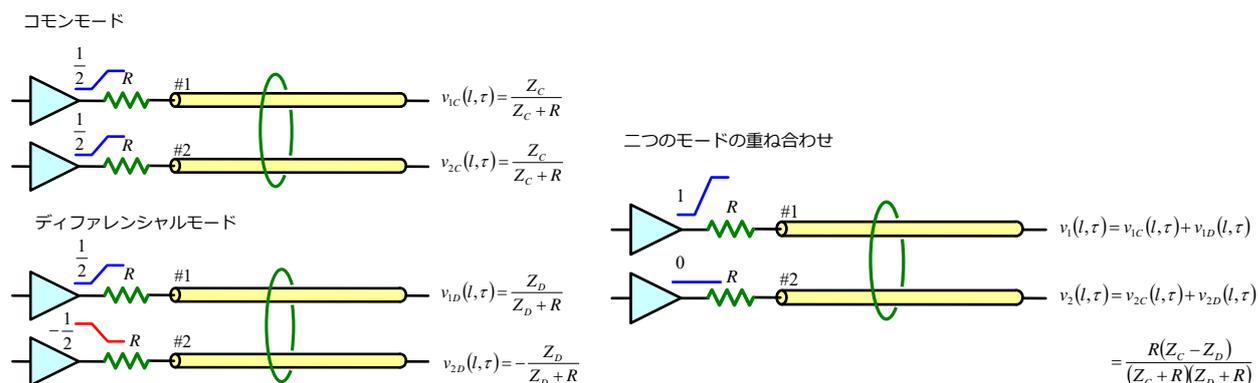
詳細は参考文献¹⁾を参照のこと。

2. 重ね合わせで解く(遠端クロストーク)

遠端クロストークの解析に限るが、図 1 の(a)のように、コモン・モードとディファレンシャル・モードの二つの信号を加えた場合を元にクロストークを求める。

同図(a)に示すように、信号の振幅は、コモンは、 $1/2$ と $1/2$ 、ディファレンシャルは、 $1/2$ と $-1/2$ とする。

この二つを、重ねると、(b)のように、2 本の線路のうち、上の線路には 1 の振幅が、下の線路は 0 の振幅、すなわち何も加えていない状態になる。



(a) コモン・モードとディファレンシャル・モード

(b) 二つのモードの重ね合わせ

図 1. 二つのモードの重ね合わせ

詳細は参考文献^{2),3)}を参照のこと。

3. 結合線路の波動方程式を解いて、ラプラス変換により遅延の級数の和で求める

LC等価回路を解いて波動方程式を求め、 $j\omega \rightarrow s$ とにおいてラプラス変換して常微分方程式を解いて、積分定数を4元の連立方程式で求める。解の分母を級数展開して、遅延の級数の和で求める。

分母の級数展開を辛抱強く行う必要があるが、その計算は、最初に一度だけ行えばよいので、線路パラメータや回路定数を変えた場合にも用いることができるので、実用として使用できる。

筆者は、級数展開を、分母の 10τ (τ は線路の片道の遅延時間)まで行った。

詳細は参考文献^{4),5),6)}を参照のこと。

4. 同じく波動方程式をフーリエ逆変換して求める⁷⁾

3を周波数関数のまま解いて、フーリエ逆変換する。

分母の級数展開が必要ないので、その意味では障壁は低い。

なお、2本結合線路の場合、4元の連立方程式であるが、差動クロストークの場合には、同様の方法で、8元の連立方程式となり、そのまま応用できる⁸⁾。

また、周波数領域で解くため、近端と遠端に容量が存在する場合も同様に解くことができる。

結合2本線路の電圧 V と電流 I を解くと、以下の波動方程式を得る。

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \omega^2 LCV = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} + \omega^2 CLI = 0 \dots\dots\dots (2)$$

L, C は、結合2本線路の等価回路の L と C の行列である。

2本の結合線路には、二つの伝搬モードが存在し、一般的に、 n 本の結合線路には n 個の伝搬モードが存在する。線路を伝わる信号(波動)は、この n 個の伝搬モードの1次結合で表される。

等しい2本、すなわち対称2本結合線路の場合には、この二つの伝搬モードを、コモン・モードとディファレンシャル・モードと呼ぶ。各モードの電圧を、 $\varepsilon_C, \varepsilon_D$ (電圧)、電流を I_C, I_D (電流)とそれぞれ表す。

すなわち、

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = A\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_C \\ \varepsilon_D \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

A は式 LC の固有ベクトルである。電流についても同様に、

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Bt = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_C \\ I_D \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Bt = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_C \\ I_D \end{pmatrix} \quad (「I」はギリシャ文字のiota: イオタ) \dots\dots\dots (5)$$

であり、それぞれの伝搬モードの電圧と電流は、積分定数 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を用いて、

$$\varepsilon_C = A_{11}e^{-j\omega\frac{x}{u_C}} + A_{12}e^{j\omega\frac{x}{u_C}} \dots\dots\dots(6)$$

$$\varepsilon_D = A_{21}e^{-j\omega\frac{x}{u_D}} + A_{22}e^{j\omega\frac{x}{u_D}} \dots\dots\dots(7)$$

$$i_C = \frac{1}{Z_C} \left(A_{11}e^{-j\omega\frac{x}{u_C}} - A_{12}e^{j\omega\frac{x}{u_C}} \right) \dots\dots\dots(8)$$

$$i_D = \frac{1}{Z_D} \left(A_{21}e^{-j\omega\frac{x}{u_D}} - A_{22}e^{j\omega\frac{x}{u_D}} \right) \dots\dots\dots(9)$$

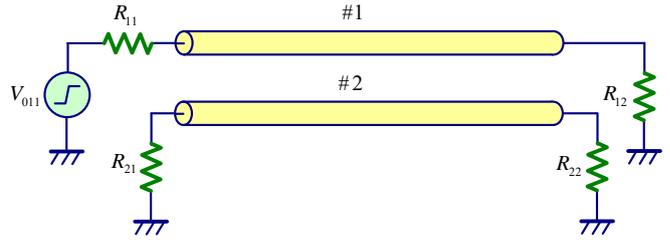


図 2. 境界条件

と表される. ここに, u は伝搬速度, Z は特性インピーダンスで,

$$u_C = \frac{1}{\sqrt{(L+L_m)(C+C_m)}}, u_D = \frac{1}{\sqrt{(L-L_m)(C-C_m)}} \dots\dots\dots(10)$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{L+L_m}{C+C_m}}, Z_D = \sqrt{\frac{L-L_m}{C-C_m}} \dots\dots\dots(11)$$

である. 式(6)~式(9)のそれぞれの右辺の第 1 項は, いずれも進行方向に進む, いわゆる右行波を表し, 第 2 項は, 逆向きの左行波を表す.

図 2 の近端と遠端の境界条件により, 式(6)~式(9)の 4 個の積分定数 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ に関する連立方程式を以下のように立てる.

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{R_{11}}{Z_C} & 1 - \frac{R_{11}}{Z_C} & 1 + \frac{R_{11}}{Z_D} & 1 - \frac{R_{11}}{Z_D} \\ 1 + \frac{R_{21}}{Z_C} & 1 - \frac{R_{21}}{Z_C} & -\left(1 + \frac{R_{21}}{Z_D}\right) & -\left(1 - \frac{R_{21}}{Z_D}\right) \\ \left(1 - \frac{R_{12}}{Z_C}\right)e^{-j\omega\tau_C} & \left(1 + \frac{R_{12}}{Z_C}\right)e^{j\omega\tau_C} & \left(1 - \frac{R_{12}}{Z_D}\right)e^{-j\omega\tau_D} & \left(1 + \frac{R_{12}}{Z_D}\right)e^{j\omega\tau_D} \\ \left(1 - \frac{R_{22}}{Z_C}\right)e^{-j\omega\tau_C} & \left(1 + \frac{R_{22}}{Z_C}\right)e^{j\omega\tau_C} & -\left(1 - \frac{R_{22}}{Z_D}\right)e^{-j\omega\tau_D} & -\left(1 + \frac{R_{22}}{Z_D}\right)e^{j\omega\tau_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{011} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

式(12)を $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ について解いて, 式(3)に代入すると, 電圧が求まる. これらは周波数関数であるから, 信号源 V_{011} を与えて, フーリエ逆変換することによって時間応答が求まる.

エクセルに備えつけの FFT は, バッチ処理のため, 面倒である. バタフライ演算を自分で作成するとリアルタイム処理が可能である.

256 点の FFT は筆者が以下に公開しているので活用してほしい.

<http://radioy.a.la9.jp/tool/tool.htm>

5. 多数段接続した LC 等価回路を SPICE で解く

最もオーソドックスな手法であり, LC 等価回路を SPICE で解く.

図 3(a)は T 型等価回路, (b)は π 型等価回路である.

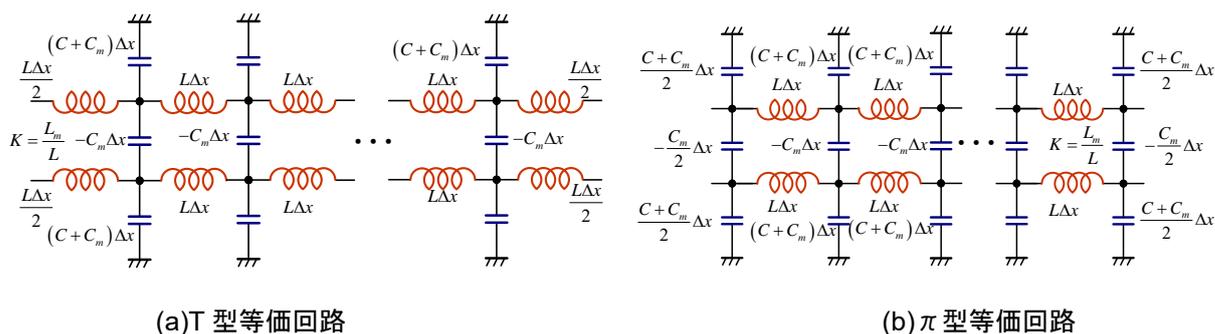


図 3. LC 等価回路

PC の性能向上で, 100 段程度の等価回路でも, 何ら問題なく解ける.

等価回路の, L, C などは専用のソフトで求められるが, 筆者の以下のツールを用いると, 容易に求めることができるので活用願いたい.

<http://radioy.a.la9.jp/tool/tool.htm> → [基板定数](#)

半世紀以上昔の古典的な近似式が独り歩きしているが, 近似の条件が現在とは大きくかけ離れている.

近似式を用いる場合には, この場合に限らず, 近似の前提をよく検討していただきたい.

本件に関する筆者の以下のコラムも参照願いたい.

<https://www.macnica.co.jp/business/semiconductor/articles/basic/140374/>

<https://www.macnica.co.jp/business/semiconductor/articles/basic/140534/>

6. モード変換と理想トランス+SPICE

式(3)および式(5)の右辺は, それぞれの伝搬モードである.

2 本の線路の電圧と電流は, それぞれの伝搬モードを固有ベクトルによる 1 次結合で表される.

図 3 は, 理想トランスによるモード変換回路の SPICE の回路図で, (a)は, Micro-Cap, (b)は LTspice である.

同図において, 線路 T1 と T2 が二つの伝搬モード, すなわち, コモン・モードとディファレンシャル・モードの線路である.

同図は, 近端クロストークの回路であり, 図 1 の回路図において,

$$R_{11} = R_{22} = 33, R_{12} = R_{21} = \infty \dots\dots\dots (13)$$

としたものである.

T1(コモン・モード)の電圧は ε_C , 電流は I_C で, T2(ディファレンシャル・モード)の電圧は ε_D , 電流は I_D である.

E は電圧制御電圧源で, F は電流制御電圧源である.

線路 1 および 2 の電圧は,

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_C + \varepsilon_D) \dots\dots\dots (14)$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_C - \varepsilon_D) \dots\dots\dots (15)$$

であり, 式(3)を満たしている.

電流は,

$$I_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 + I_2) \dots\dots\dots (16)$$

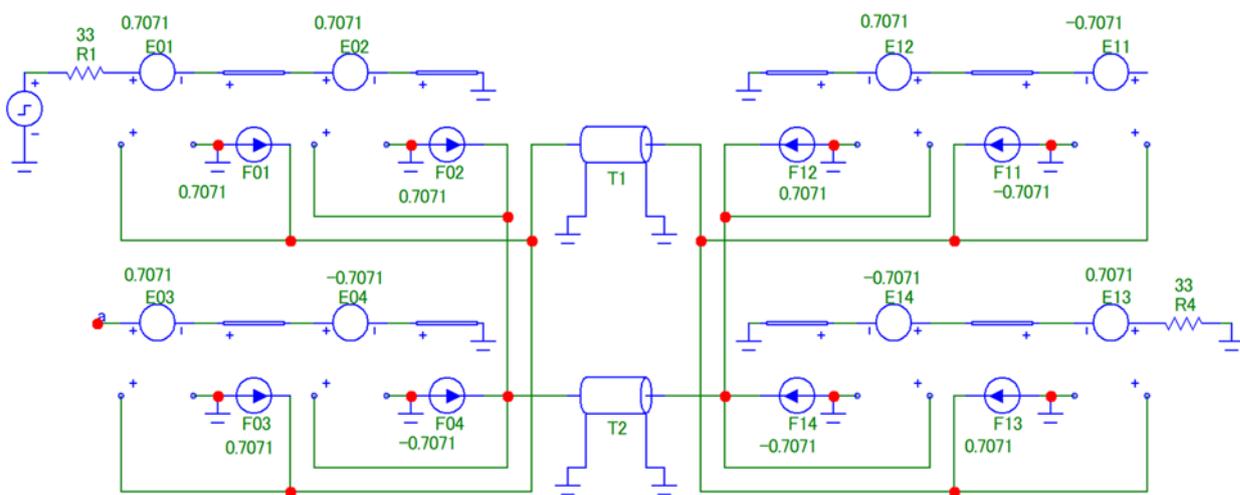
$$I_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 - I_2) \dots\dots\dots (17)$$

であり, これから, I_1, I_2 を求めると,

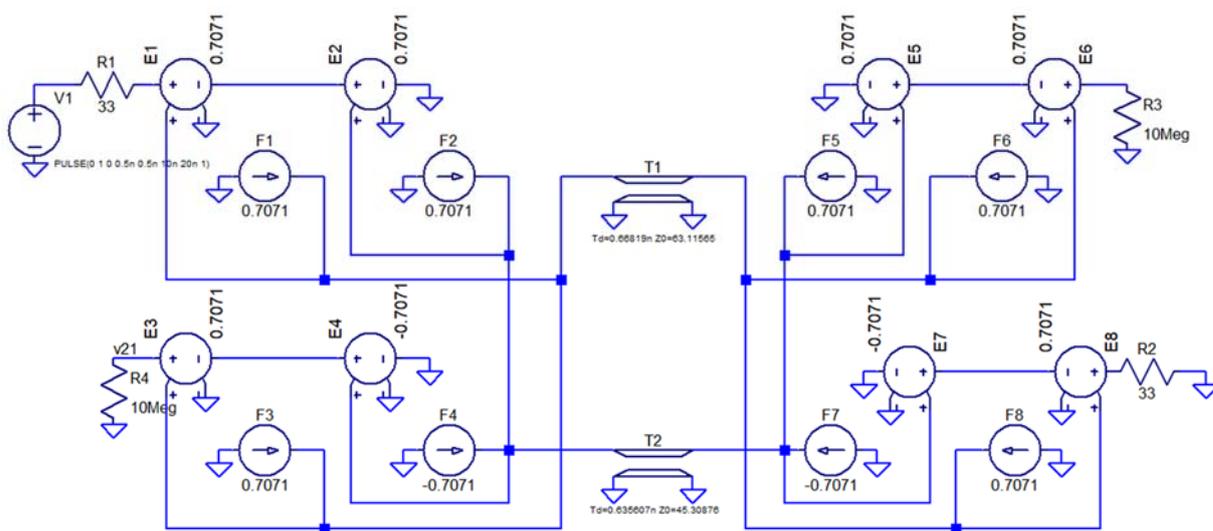
$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_C + I_D) \dots\dots\dots (18)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_C - I_D) \dots\dots\dots (19)$$

となり, 式(5)を満たしている.



(a) Micro-Cap の例



(b) LTspice の例

図 3. 理想トランスによるモード変換

7. まとめ

以上述べた 6 つの方法は、当然ながら同じ結果を得る。

それぞれの特徴を活かして、各自に適した手法を用いていただきたい。

参考文献

- 1) 碓井有三：ボード設計者のための分布定数回路のすべて(改訂 3 版) 自費出版
(<http://radioy.a.la9.jp/>), pp. 82-87, 2016
<http://radioy.a.la9.jp/book/book.htm>
- 2) 碓井有三：碓井有三：前掲 1), pp.72-74
- 3) 周 英明：「プリント回路におけるクロストーク」 p.37, EMC1990.2.5 / p.28, EMC1990.3.5 /
p.61,EMC1990.4.5
- 4) 碓井有三：前掲 1), pp.87-92
- 5) 碓井 有三：“クロストークの数式解その 1” マクニカ, 碓井有三のスペシャリストコラム
<https://www.macnica.co.jp/business/semiconductor/articles/basic/136482/>
- 6) 碓井 有三：“クロストークの数式解その 2” マクニカ, 碓井有三のスペシャリストコラム
<https://www.macnica.co.jp/business/semiconductor/articles/basic/136826/>
- 7) 碓井 有三：“クロストークの数式解その 3 スマートな解き方” マクニカ, 碓井有三のスペシャリス
トコラム
<https://www.macnica.co.jp/business/semiconductor/articles/basic/139382/>
- 8) 碓井有三：前掲 1), pp.215-219